



# UFAL

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

**CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA**

## Propagação Superluminal de Pulsos com Suporte Compacto Suave em Circuitos Eletrônicos

por

Samuel Teixeira de Souza

W} ã^! • ãã^Á^ã^!ã^Á^Á^æ [ æ

Campus A. C. Simões  
Tabuleiro dos Martins  
57.072-970 - Maceió - AL.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS  
INSTITUTO DE FÍSICA

PROPAGAÇÃO SUPERLUMINAL DE PULSOS COM SUPORTE COMPACTO  
SUAVE EM CIRCUITOS ELETRÔNICOS

*Samuel Teixeira de Souza*

Alagoas

2010

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS  
INSTITUTO DE FÍSICA

PROPAGAÇÃO SUPERLUMINAL DE PULSOS COM SUPORTE COMPACTO  
SUAVE EM CIRCUITOS ELETRÔNICOS

*Samuel Teixeira de Souza*

*Dissertação apresentada ao Departamento de Física da Universidade Federal de Alagoas, como parte dos requisitos para obtenção do Título de Mestre em Ciências.*

ORIENTADOR: *Prof. Dr. Jandir Miguel Hickmann*

CO-ORIENTADOR: *Prof. Dr. Márcio A. R. C. de Alencar*

Alagoas

2010

**Catálogo na fonte**  
**Universidade Federal de Alagoas**  
**Biblioteca Central**

**Divisão de Tratamento Técnico**

**Bibliotecário: Marcelino de Carvalho Freitas Neto**

S729p

Souza, Samuel Teixeira de.

Propagação superluminal de pulsos com suporte compacto suave em circuitos eletrônicos / Samuel Teixeira de Souza, 2010.  
124 f. : grafs.

Orientador: Jandir Miguel Hickmann.

Co-orientador: Márcio A. R. C. de Alencar.

Dissertação (mestrado em Física da Matéria Condensada) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Física. Maceió, 2010.

Bibliografia: f. 121-124.

1. Pulso, geradores de. 2. Informação, velocidade da. 3. Circuitos eletrônicos.  
I. Título.

CDU: 537.87

**PARECER DA BANCA EXAMINADORA DE DEFESA DE  
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**

***“Propagação superluminal de pulsos com suporte compacto  
suave em circuitos eletrônicos”***

**por**

***Samuel Teixeira de Souza***

A Banca Examinadora composta pelos professores Jandir Miguel Hickmann (Orientador), do Instituto de Física da Universidade Federal de Alagoas, Cláudio Benedito Silva Furtado, do Departamento de Física da Universidade Federal da Paraíba e Solange Bessa Cavalcanti, do Instituto de Física da Universidade Federal de Alagoas, consideram o candidato aprovado com grau “ A ”.

Maceió, 1º de outubro de 2010

  
Prof. Jandir Miguel Hickmann

  
Prof. Cláudio Benedito Silva Furtado

  
Profª. Solange Bessa Cavalcanti

*Aos meus pais Genair e Leonora,  
esteio da minha existência, e a  
minha esposa Geovana, por todo  
amor, paciência e dedicação.*

# Agradecimentos

- À Deus, sem Ele nada é possível;
- À minha amada esposa, pelo apoio e incentivo durante toda esta jornada; sem ela eu tenderia ao fracasso;
- Ao professor *Jandir Miguel Hickmann*, pela oportunidade de desenvolver esta pesquisa sob sua orientação, por sua experiência, suas críticas e sugestões, bem vindas e necessárias, à realização do mestrado;
- Ao professor *Marcio A. R. C. Alencar*, meu co-orientador no mestrado, por sua grande ajuda e apoio, sem o qual eu não conseguiria terminar esta tarefa;
- Aos integrantes do grupo *OPTMA* que proveram-me muitas oportunidades; Ao professor *Eduardo J. da S. Fonseca* e todos os colegas de trabalho, em especial ao *Hemerson P. S. Castro*, amigo de longa data, pelo incentivo à cursar o mestrado e por dividir pacientemente a sala comigo; Também ao *Cássio E. A. dos Santos* que muito nos ajudou em nossa vinda à Maceió;
- À minha família que, apesar de longe, sempre me apoiou;
- À CAPES pela concessão da bolsa de mestrado, que tornou possível este trabalho;
- Aos professores e colegas do Instituto de Física da UFAL que proveram-me com ensinamentos;
- À todos que, de forma direta ou indiretamente, contribuíram para a elaboração deste trabalho.

*"Nosso mundo é composto de gigantes nucleares e anões éticos. Sabemos mais sobre a guerra do que sobre a paz, mais sobre matar do que sobre viver. Descobrimos o segredo do átomo e rejeitamos o sermão da montanha."*

Extraído da Revista Seleções

*"Feliz é o homem que colhe bons frutos do seu trabalho."*

Obrigado Senhor



# Resumo

Neste trabalho, utilizando pulsos baseados em funções com suporte compacto e pontos não analíticos de intensidade zero, infinitamente deriváveis e perfeitamente suaves, demonstramos, numérica e experimentalmente, uma nova abordagem para modelar a informação propagando se através de um circuito eletrônico de atrasos de grupo negativo. Aqui, a informação é associada a um ponto não analítico presente na asa frontal do pulso. O pulso ou qualquer uma de suas derivadas não apresenta qualquer descontinuidade, em contradição direta com a literatura padrão que alega a necessidade de uma frente de onda descontínua ou derivadas descontínuas para codificar a informação. Nossos resultados mostram que o ponto não analítico na asa frontal do pulso se propaga com uma velocidade igual à velocidade da luz no vácuo  $c$  para todos os casos investigados. Descobrimos que a influência da causalidade sobre a propagação do pulso, não apenas limita a velocidade deste ponto, mas pode causar grandes alterações na forma dos pulsos durante a sua propagação através de um sistema superluminal, produzindo uma frente abrupta e até mesmo um choque de onda do pulso. Nossos resultados contribuem para uma melhor compreensão da propagação da informação e esclarecem talvez um dos últimos equívocos sobre a superluminalidade e a velocidade da informação.

**Palavras-chave:** Superluminalidade, função com suporte compacto e velocidade da informação

# Abstract

In this work, using pulses based on functions with compact support and perfectly smooth infinitely differentiable zero intensity non analytical points, we demonstrated numerically and experimentally a new approach to model information propagating through an electronic circuit producing negative group delays. Here, the information is associated to smooth non analytical points present in the leading edge of a pulse. The pulse or any of its derivatives does not present any discontinuity, in direct contradiction with standard literature that claims the necessity of a discontinuous front or a discontinuous derivative in order to code information. Our results show that the non analytical point in the pulse's leading edge propagates with a velocity equal to velocity of light in vacuum  $c$  for all investigated cases. We find that the causality influence on the pulse propagation not only limits the speed of this point, but it may strongly modify the pulses during their propagation through a superluminal system, producing pulse steepening and even pulse breakup. Our results contribute to a better understanding of information propagation and shed light over perhaps one of the last misconceptions regarding superluminality and the speed of information.

**Keywords:** Superluminality, function with compact support and speed of information.

# Lista de Figuras

1.1	Modelo simples para um elétron para estudo da absorção e dispersão. . . .	25
1.2	Índice de refração e coeficiente de absorção próximo a uma ressonância. . .	31
1.3	Representação esquemática de um pulso em termos das suas várias compo- nentes. Note que essas contribuições somam em fase no pico do pulso. . . .	46
1.4	Velocidade de grupo como uma função da dispersão. Neste gráfico, para o qual $n_0 = 1$ , a velocidade de grupo é demonstrada como uma função de $\omega dn/d\omega$ . Para $dn/d\omega$ positivo (dispersão normal), $0 < v_g < c$ (curva sólida <b>azul</b> ). Para $dn/d\omega$ negativo (dispersão anômala), $v_g > c$ ou $v_g < 0$ (curva tracejada <b>vermelha</b> ) . . . . .	48
1.5	Representação esquemática de um pulso se propagando através de um meio com vários valores de velocidade de grupo. . . . .	49
1.6	(a) $v_g$ como uma função de $\omega dn/d\omega$ e (b) $t_g$ como uma função de $\omega dn/d\omega$ . Em ambos os casos, a linha tracejada em vermelho representa luz rápida e a linha sólida em azul representa luz lenta. Para esses gráficos, $n_0 = 1$ . . .	55
1.7	(a) Pulso incidente e (b) pulso transmitido para uma comprimento L de propagação e velocidade de grupo $v_g > c$ . A parte sombreada de (b) é completamente determinada pela parte sombreada de (a). . . . .	59
1.8	Esquema de uma função analítica [21]. . . . .	60
1.9	Esquema ilustrativo de duas funções com pontos não analíticos [21]. . . . .	61
1.10	Esquema do pulso com suporte compacto. . . . .	63
2.1	Simbolo do amplificador operacional. . . . .	69
2.2	Modo de operação (a) sem realimentação, (b) com realimentação positiva e (c) com realimentação negativa. . . . .	70
2.3	(a) Amplificador inversor e (b) amplificador não-inversor. . . . .	73
2.4	Circuito eletrônico (caixa preta) para atrasos negativos. . . . .	75
2.5	Circuito amplificador operacional com realimentação negativa [30]. . . . .	79
2.6	Resultado experimental mostrando o avanço do pulso [6]. . . . .	81
2.7	Resultado experimental mostrando que a descontinuidade não pode avançar [6]. . . . .	82
2.8	Circuito amplificador sintonizado que exhibe atrasos negativos em certas regiões do espectro de frequência. . . . .	87
2.9	Fase (curva sólida azul) e ganho (curva tracejada vermelha) da função de transferência para o amplificador sintonizado mostrado na Figura 2.8. Parâmetros: $\gamma = 0$ , $l\omega_0$ e $\gamma_2 = 10\gamma$ . . . . .	88

2.10	Atraso de grupo para a função de transferência do amplificador sintonizado mostrado na Figura 2.8, como uma função da frequência da portadora. Parâmetros: $\gamma = 0$ , $1\omega_0$ e $\gamma_2 = 10\gamma$ . . . . .	89
2.11	Linha de transmissão superluminal formada por seções da linha de transmissão normal intercaladas com o amplificador sintonizado mostrado na figura 2.8. . . . .	90
3.1	Forma do pulso idealizado no experimento de Stenner. Note que os dois pulsos são inicialmente idênticos. A informação está contida no ponto onde eles divergem. . . . .	96
3.2	Esquema de um pulso com suporte compacto. . . . .	98
3.3	Modelo do circuito de atraso negativo utilizado em nossos estudos. . . . .	100
3.4	Representação dos elementos, do circuito de atraso de grupo negativo, através de sua impedância complexa equivalente . . . . .	101
3.5	Simplificação do circuito em termos das impedância equivalentes $Z_1$ e $Z_2$ . . . . .	102
3.6	Circuito resultante da aplicação das "Regras de Ouro". . . . .	102
3.7	Ganho (curva tracejada vermelha) e fase (curva sólida azul) da função de transferência do filtro linear passivo. . . . .	103
3.8	Ganho (curva tracejada vermelha) e fase (curva sólida azul) da função de transferência total $T(\omega)$ do circuito de atraso de grupo negativo. . . . .	104
3.9	Atraso de grupo como uma função da frequência da portadora para o circuito de atraso negativo descrito neste capítulo. . . . .	105
3.10	Esquema de montagem de um circuito de ganho unitário. . . . .	107
3.11	Configuração experimental. Um amplificador de ganho unitário foi incluído entre o AFG3252 e o osciloscópio como referência para o avanço de grupo provocado pela cadeia de circuitos de atraso negativo e para evitar realimentação. . . . .	108
3.12	Resultado experimental e simulação numérica da propagação de um pulso Gaussiano através de um circuito de ganho unitário (curva tracejada vermelha) e um circuito de atraso negativo (curva sólida azul). Parâmetros: $\tau = 2,0s$ e $\omega_c = 0Hz$ . . . . .	109
3.13	Resultado experimental e simulação numérica da propagação de um pulso Gaussiano através de um circuito de ganho unitário (curva tracejada vermelha) e três circuitos de atraso negativo (curva sólida azul). Parâmetros: $\tau = 2,0s$ e $\omega_c = 0Hz$ . . . . .	110
3.14	Espectro do pulso Gaussiano de entrada mostrado nas figuras 3.12 e 3.13 juntamente com a fase e o ganho da função de transferência total do circuito. Note que a parte significativa do espectro do pulso é limitado ao interior da região onde a mudança de fase em função da frequência é aproximadamente linear. . . . .	111
3.15	Resultado experimental e simulação numérica da propagação de um pulso Gaussiano através de um circuito de ganho unitário (curva tracejada vermelha) e através de um e de três circuitos de atraso negativo (curva sólida azul). Parâmetros: $\tau = 1,0s$ e $\omega_c = 0Hz$ . . . . .	111

3.16	Espectro do pulso Gaussiano de entrada mostrado na figura 3.15 juntamente com a fase e o ganho da função de transferência total do circuito.. Note que a parte significativa do espectro do pulso não está limitada a região onde a mudança de fase em função da frequência é linear. . . . .	112
3.17	Modelo do pulso com <i>SCS</i> utilizado em nosso estudo. Os parâmetros deste pulso são: $A = 350$ , $B = 225$ , $C = 100$ e $\omega_c = 0$ . Assim os pontos não analíticos na forma de onda estão localizados em $t = \sqrt{B/C} = \pm 1,5s$ . . . . .	113
3.18	Resultado experimental e simulação numérica da propagação de um pulso com <i>SCS</i> através de um circuito de ganho unitário (curva tracejada vermelha) e a propagação superluminal da parte central deste pulso em um circuito de atraso de grupo negativo (curva sólida azul). . . . .	114
3.19	Resultado experimental e simulação numérica da propagação de um pulso com <i>SCS</i> através de um circuito de ganho unitário (curva tracejada vermelha) e uma frente abrupta devido a propagação através de dois circuitos de atraso negativo (curva sólida azul). . . . .	115
3.20	Espectro do pulso com <i>SCS</i> de entrada mostrado nas figuras 3.18 e 3.19 juntamente com a fase e o ganho da função de transferência total do circuito. Note que, além das componentes adicionais de frequências não presentes no espectro do pulso gaussiano, uma parte significativado do espectro deste pulso não está limitada a região onde a mudança de fase em função da frequência é linear. . . . .	116
3.21	Resultado experimental e simulação numérica da propagação de um pulso com <i>SCS</i> através de um circuito de ganho unitário (curva tracejada vermelha) e o choque de onda do pulso ao se propagar através de quatro circuitos de atraso negativo (curva sólida azul). . . . .	117

# $g \ll f \hat{p} \dots$

<b>Introdução</b>	<b>1G</b>
<b>1 Superluminalidade e a Não Violação da Causalidade</b>	<b>17</b>
1.1 Introdução . . . . .	17
1.2 A equação de onda . . . . .	17
1.3 Superposição de ondas . . . . .	21
1.4 Dispersão e absorção . . . . .	24
1.5 Causalidade e relações de Kramers-Kronig . . . . .	32
1.5.1 Não-localidade no tempo . . . . .	32
1.5.2 Modelo simples para $G(\tau)$ . . . . .	35
1.5.3 Causalidade e domínio de analiticidade de $\varepsilon(\omega)$ . . . . .	38
1.5.4 Relações de Kramers-Kronig . . . . .	40
1.6 Velocidade da informação e a causalidade de Einstein . . . . .	43
1.7 Velocidades da luz . . . . .	45
1.7.1 Velocidade de fase e de grupo . . . . .	45
1.7.2 Velocidade do transporte de energia . . . . .	50
1.7.3 Velocidade da frente . . . . .	50
1.7.4 Velocidade de sinal ou informação . . . . .	52
1.8 Velocidade de grupo versus tempo de grupo . . . . .	54
1.9 Não violação da causalidade de Einstein . . . . .	56
1.10 Definição de ponto não analítico . . . . .	60
1.11 Função com suporte compacto suave . . . . .	62
1.12 Conclusão . . . . .	65
<b>2 Circuito de Atraso de Grupo Negativo e a Superluminalidade</b>	<b>66</b>
2.1 Introdução . . . . .	66
2.2 Revisão sobre circuitos . . . . .	67
2.3 Amplificador operacional, realimentação e as " <i>Regras de Ouro</i> " . . . . .	68
2.3.1 Amplificador operacional e a realimentação . . . . .	69
2.3.2 Regras de ouro na operação de um amplificador operacional . . . . .	71
2.3.3 Amplificador operacional como amplificador inversor e não inversor . . . . .	72
2.4 Atraso de grupo . . . . .	74
2.5 Função de transferência para atrasos de grupo negativos . . . . .	76
2.6 Princípios para geração de atrasos negativos em circuitos eletrônicos . . . . .	79
2.6.1 Atrasos de grupo negativos exigidos pelas " <i>Regras de Ouro</i> " . . . . .	79

2.6.2	Inversão da função de transferência dos circuitos lineares passivos . . . . .	83
2.6.3	Transporte de energia por pulsos nos domínios ópticos e eletrônicos . . . . .	84
2.7	Analogias entre sistemas atômicos e circuitos eletrônicos . . . . .	86
2.7.1	O amplificador sintonizado . . . . .	87
2.8	Conclusão . . . . .	91
<b>3</b>	<b>Velocidade da Informação: Discussões e Resultados</b>	<b>93</b>
3.1	Introdução . . . . .	93
3.2	O que é informação? . . . . .	94
3.3	Experimentos sobre a velocidade da informação . . . . .	95
3.4	Informação em pontos não analíticos numa função com SCS . . . . .	97
3.5	Circuito e o experimento . . . . .	99
3.5.1	O circuito e a função de transferência . . . . .	100
3.5.2	Arranjo experimental . . . . .	106
3.6	Pulso Gaussiano . . . . .	108
3.7	Pulso com <i>SCS</i> . . . . .	112
<b>4</b>	<b>Conclusão</b>	<b>119</b>
	<b>V}v,}.{ ^uz}u</b>	<b>EFE</b>

# Introdução

Há mais de um século R. W. Wood [1] observou a dispersão anômala e posteriormente Sommerfeld, Brillouin e outros desenvolveram a teoria de propagação da luz em meios anormalmente dispersivos. Em especial, Sommerfeld e Brillouin [2] identificaram cinco velocidades que caracterizam um pulso, entre as quais estavam a velocidade de fase, a velocidade de grupo, a velocidade da frente, a velocidade de transporte de energia e a então chamada velocidade do sinal, o que hoje chamamos de informação, sendo esta o foco do nosso trabalho. Brillouin salientou que, de acordo com as leis de dispersão, na região de dispersão anômala dentro de uma linha de absorção a velocidade de grupo, na qual o envelope do pulso viaja, poderia ser superluminal, ou seja, maior do que a velocidade da luz no vácuo  $c$ . Garrett e McCumber [3] fizeram a primeira demonstração teórica que um pulso Gaussiano pode se propagar com velocidade de grupo superluminal e sem sofrer muitas distorções em sua forma inicial. Chu e Wong [4] verificaram experimentalmente essas previsões usando um laser de picosegundo se propagando através de um meio absorvedor numa região de dispersão anômala dentro de uma linha de absorção óptica.

O principal problema durante estas e outras investigações sobre a propagação de pulsos de luz em sistemas superluminais, foi conciliar a possibilidade que a velocidade de grupo da luz pode exceder  $c$  com a exigência, da teoria da relatividade, que nenhum sinal (informação) pode ser transmitido superluminalmente. Todos esses autores ressaltaram que a velocidade de grupo superluminal não contradiz a teoria da relatividade, ou causalidade de “*Einstein*”. Na verdade, foi demonstrado que a causalidade exige que meios



com dispersão mostrem velocidades de grupo superluminais em alguma parte do espectro. Sommerfeld e Brillouin concluíram que a velocidade de grupo não é, em geral, a velocidade com que um sinal pode ser transmitido.

Chiao *et al* [5] demonstraram, teoricamente, que alguns circuitos eletrônicos com amplificadores operacionais com realimentação negativa possuem analogias a sistemas atômicos de dois níveis com população invertida e que estes amplificadores sintonizados exibem comportamentos aparentemente não causal, tais como atrasos de grupo negativo e velocidade de grupo superluminal. Esses comportamentos contra-intuitivos da propagação superluminal de pulsos em circuitos eletrônicos também foram observados experimentalmente. O primeiro destes experimentos [6] utilizou um circuito eletrônico composto de um amplificador operacional com um filtro passivo RLC num ciclo de realimentação negativa. Este circuito produziu um atraso de grupo negativo de forma que o pico de tensão do pulso de saída apareceu na porta de saída do circuito antes que o pico de tensão do pulso de entrada chegasse à porta de entrada do circuito. Esse fenômeno aparentemente não causal, de fato, não viola o princípio da causalidade, já que existem informações suficientes numa pequena porção do início de qualquer forma de onda analítica para reproduzir a forma de onda inteira. Além disso, foi demonstrado que a causalidade está unicamente relacionada com a ocorrência de descontinuidades abruptas em um pulso e não com os picos de tensão deste pulso. Entretanto, como pode ser visto na Fig. 6 da referência [6], o pulso de saída é fortemente distorcido após a chegada da descontinuidade, apresentando oscilações muito grandes. Este é um resultado importante, pois claramente indica que tais descontinuidades abruptas não poderiam ter sido utilizadas no estudo da velocidade da informação em nosso circuito eletrônico neste trabalho.

Desde os trabalhos seminais de Sommerfeld e Brillouin, dois pontos importantes sobre a velocidade da informação e sua propagação foram esclarecidos: (1) a velocidade de grupo não pode ser considerada como a velocidade da informação e (2) um pulso analítico não

pode transportar informações.

Utilizando pulsos baseados em funções com suporte compacto perfeitamente suave e pontos não analíticos de intensidade zero, infinitamente deriváveis, mostraremos uma nova abordagem para modelar a informação se propagando através de um meio superluminal. Na verdade, a idéia de que a informação pode ser associada com pontos não analíticos estava implícita na definição de sinal por Sommerfeld. No entanto, a falta de uma forma adequada para representar a informação levou vários autores a realizarem investigações empregando pulsos com descontinuidades abruptas [7, 8], entretanto, mesmo com os melhores esforços experimentais, a velocidade da informação não pôde ser observada de forma clara e as incertezas associadas às suas medidas foram grandes.

A beleza da nossa abordagem, que descreve a primeira utilização direta de pulsos com suporte compacto em um experimento, é a sua simplicidade de representar a informação durante a propagação superluminal do pulso, identificar sua velocidade limite e observar experimentalmente novas conseqüências da causalidade em tais sistemas. Veremos que a informação pode ser claramente associada ao ponto não analítico na asa frontal do pulso, e sua velocidade investigada numérica e experimentalmente em um circuito eletrônico de atraso negativo. Observaremos que a velocidade deste ponto não analítico é limitada pela causalidade de Einstein e é exatamente igual à velocidade da luz no vácuo  $c$  quando a velocidade de grupo do pulso é maior do que esta. Além disso, veremos que a causalidade não apenas limita a velocidade da informação associada a este ponto não analítico, mas também provoca uma frente abrupta e o choque de onda do pulso.

Para realizar o estudo destes surpreendentes efeitos da velocidade da informação em um pulso com suporte compacto, através de um sistema superluminal, dividiremos o nosso trabalho em três capítulos. No capítulo inicial apresentaremos a descrição de um modelo físico que apresenta uma região de dispersão anômala, bem como o comportamento de um pulso ao se propagar nesta região. Mostraremos por que a propagação superluminal de um

pulso analítico não representa uma violação da teoria da relatividade. No capítulo seguinte apresentaremos analogias entre um circuito eletrônico e um sistema atômico modelado classicamente como um dielétrico de Lorentz, bem como a relação entre os atrasos de grupo negativos, produzidos por estes circuitos, e o conceito de superluminalidade. No último capítulo, definiremos um conceito para a informação codificada em uma forma de onda e apresentaremos os resultados e discussões referentes à propagação do pulso com suporte compacto na região de atraso de grupo negativo. Finalizaremos com uma conclusão onde são sumarizados os resultados encontrados.

# Capítulo 1

## Superluminalidade e a Não Violação da Causalidade

### 1.1 Introdução

Neste capítulo, estudaremos as condições necessárias em um sistema físico para obtermos superluminalidade, ou seja, quando a velocidade de grupo de um pulso é maior que a velocidade da luz no vácuo  $c$ . Faremos distinções entre algumas das velocidades características de um pulso de luz. Mostraremos por que a propagação superluminal de um pulso analítico não representa uma violação do princípio da causalidade, segundo o qual a causa sempre precede o efeito. Por fim estudaremos as características de uma função com suporte compacto contendo pontos não analíticos de intensidade zero, infinitamente deriváveis e perfeitamente suaves.

### 1.2 A equação de onda

Introduziremos aqui a equação da onda que será utilizada para estudar a propagação de um pulso e comentaremos duas das possíveis abordagens para resolver este problema.

De um modo geral, para se estudar a propagação de uma onda eletromagnética, tomamos como partida as equações de Maxwell. Resolvemos estas equações levando em conta as condições de contorno imposta pelo problema físico abordado. Um aspecto básico

das equações de Maxwell para o campo eletromagnético é o da existência de soluções sob a forma de ondas propagantes que transportam energia de um ponto à outro. Vamos adotar como ponto de partida as equações de Maxwell [9] na ausência de densidades de correntes e cargas livres, e para meios não condutores, dadas por

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (1.1)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0 \quad (1.2)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad (1.3)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = 0 \quad (1.4)$$

onde  $\vec{E}$  é o campo elétrico,  $\vec{H}$  é o campo magnético,  $\vec{D}$  é o deslocamento elétrico e  $\vec{B}$  é a indução magnética. Em materiais lineares, os campos  $\vec{D}$  e  $\vec{H}$  são relacionados a  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  por

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad (1.5)$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (1.6)$$

nos quais:  $\epsilon$  é a permissividade elétrica e  $\mu$  é a permeabilidade magnética. Estamos, particularmente, interessados em estudar a propagação de ondas eletromagnéticas num meio dispersivo. Utilizando as equações de Maxwell é possível obter equações de propagação para  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$ , as equações obtidas são chamadas de equações de onda.

Aplicando o operador rotacional sobre a equação (1.3), obtemos

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} + \vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad (1.7)$$

e usando as equações (1.6), (1.4) e (1.5), podemos reescrever a equação acima como

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{D} + \mu\epsilon \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{H}) &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{D} + \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{D}}{\partial t^2} &= 0 \end{aligned} \quad (1.8)$$

mas, sabemos que para qualquer campo vetorial  $\vec{A}$ , é válida a relação

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} \quad (1.9)$$

assim, usando essa identidade vetorial juntamente com as equações (1.2) e (1.5), podemos reescrever a equação (1.8) como

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (1.10)$$

que é a *equação de onda* para  $\vec{E}$ . Uma equação análoga pode ser obtida para  $\vec{B}$ , aplicando se o operador rotacional sobre a equação(1.4) e seguindo os procedimentos discutidos acima.

$$\nabla^2 \vec{B} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0. \quad (1.11)$$

Estas equações de onda regem o campo eletromagnético num meio linear, homogêneo, no qual a densidade de cargas livres é nula, e o meio não é condutor.

De uma forma mais geral, podemos escrever a equação de onda para o campo eletromagnético no meio descrito acima como

$$\nabla^2 u - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (1.12)$$

onde

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \quad (1.13)$$

é uma constante que tem as dimensões de velocidade características do meio. A equação de onda (1.12) tem soluções bem conhecidas das ondas planas:

$$u = e^{i\vec{k} \cdot \vec{x} - i\omega t} \quad (1.14)$$

onde a frequência  $\omega$  e o módulo do vetor de onda  $\vec{k}$  estão relacionados por

$$k = \frac{\omega}{v} = \sqrt{\mu\varepsilon}\omega \quad (1.15)$$

ou

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{c}{n}. \quad (1.16)$$

A quantidade  $n$  é chamada de *índice de refração* e geralmente é uma função da frequência. Quando se consideram as ondas se propagando em apenas uma direção, por exemplo na direção  $z$ , a solução fundamental é

$$u(z, t) = e^{ikz - i\omega t}. \quad (1.17)$$

Quando o meio é dispersor, isto é, quando o produto  $\mu\varepsilon$  é uma função da frequência, podemos modificar certas partes da discussão inicial. Fazendo um desenvolvimento integral de Fourier em  $\omega$ ,

$$\vec{D}(\vec{x}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \tilde{D}(\vec{x}, \omega) e^{-i\omega t} \quad (1.18)$$

$$\vec{H}(\vec{x}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \tilde{H}(\vec{x}, \omega) e^{-i\omega t} \quad (1.19)$$

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \tilde{E}(\vec{x}, \omega) e^{-i\omega t} \quad (1.20)$$

$$\vec{B}(\vec{x}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \tilde{B}(\vec{x}, \omega) e^{-i\omega t} \quad (1.21)$$

e usando estas equações juntamente com o fato de que  $\tilde{D}(\vec{x}, \omega) = \varepsilon(\omega) \tilde{E}(\vec{x}, \omega)$  e  $\tilde{B}(\vec{x}, \omega) = \mu(\omega) \tilde{H}(\vec{x}, \omega)$ , antes de combinar em (1.1 - 1.4), e fazendo as manipulações análogas as usadas para obter as equações de onda (1.10) e (1.11) chega-se à *equação de onda de Helmholtz*,

$$\nabla^2 u + \mu\varepsilon\omega^2 u = 0 \quad (1.22)$$

ou

$$(\nabla^2 + \mu\varepsilon\omega^2) \begin{Bmatrix} \tilde{E} \\ \tilde{B} \end{Bmatrix} = 0 \quad (1.23)$$

que é uma outra possível forma de estudar a propagação de um pulso. Se considerarmos a propagação ao longo da direção  $z$ , e usarmos a relação (1.16), podemos escrever que

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \left( \frac{\omega}{c} n(z, \omega) \right)^2 \right] \begin{Bmatrix} \tilde{E}(z, \omega) \\ \tilde{B}(z, \omega) \end{Bmatrix} = 0 \quad (1.24)$$

no qual  $n(z, \omega)$  é o índice de refração do meio.

## 1.3 Superposição de ondas

Nesta seção estudaremos o comportamento de uma onda eletromagnética policromática ao se propagar num meio dispersivo, para isso, utilizaremos o princípio de superposição de ondas.

Na seção anterior, vimos que as equações de Maxwell possuem soluções bem conhecidas das ondas planas. Tratamos apenas de ondas monocromáticas, as que têm uma frequência e um número de ondas definidos. Na realidade, tais soluções ideais não existem. Mesmo a fonte de luz mais monocromática possível, contém um espectro finito (embora pequeno) de frequências ou de comprimentos de ondas. O fato de toda radiação ser policromática não invalida a discussão feita até agora em relação à propagação de ondas, isso porque as equações envolvidas, isto é, as equações de Maxwell, são lineares. Assim, em princípio, uma superposição linear com coeficientes apropriados dos vários componentes monocromáticos de uma onda policromática deveria resolver a questão. Na prática, porém, existem algumas dificuldades. Num meio dispersivo, ou seja, num meio em que  $\varepsilon = \varepsilon(\omega)$  ou  $\mu = \mu(\omega)$ , ou ainda,  $n = n(\omega)$ , ondas de frequências diferentes podem se propagar com velocidades diferentes. Aqui é importante notar que a velocidade dada, por exemplo, pela equação (1.16), é a velocidade de uma onda monocromática de frequência  $\omega$  (ou velocidade de fase  $v_f$  de uma onda monocromática). Uma onda policromática, formada por uma superposição de ondas monocromáticas, não possui uma velocidade de fase definida. Assim, como ondas de frequências diferentes têm velocidades de fase diferentes, a forma da onda policromática pode se alterar durante a propagação, de modo que ocorre também uma alteração entre as fases relativas das ondas constituintes. Além disso, a propagação de energia através das ondas normalmente é feita numa velocidade diferente das  $v_f(\omega)$  das componentes. Eventualmente, essa velocidade pode



até mesmo não ter um significado físico preciso, dependendo da situação.

Levando em conta as questões acima, a melhor forma de tratar ondas policromáticas consiste em considerar uma superposição na forma de séries ou transformadas de Fourier. Para simplificar o tratamento, sem perder aspectos importantes, vamos considerar ondas unidimensionais, propagando-se na direção  $z$ . Além disso, vamos considerar que os meios podem ser dispersivos, com uma relação geral entre  $\omega$  e  $k$  dada por

$$k = k(\omega). \quad (1.25)$$

Assim, a partir da solução básica (1.14), podemos construir uma solução geral na forma

$$u(z, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) e^{ik(\omega)z - i\omega t} d\omega \quad (1.26)$$

onde  $u(z, t)$  representa o campo elétrico ou o magnético. A amplitude  $A(\omega)$  descreve as propriedades de superposição linear das diversas ondas. Ela é dada pela transformada de Fourier da amplitude espacial  $u(z, t)$  calculada em  $z = 0$  por meio de

$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(0, t) e^{i\omega t} dt. \quad (1.27)$$

Se  $u(0, t)$  representa uma onda harmônica,  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-i\omega_0 t)$ , para todos os  $t$ , a relação de ortogonalidade [9] mostra que

$$A(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\omega - \omega_0)t} dt$$

$$A(\omega) = \delta(\omega - \omega_0). \quad (1.28)$$

Portanto, a onda em qualquer tempo será

$$u(z, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_0) e^{ik(\omega)z - i\omega t} d\omega \quad (1.29)$$

ou

$$u(z, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ik_0 z - i\omega_0 t} \quad (1.30)$$

onde  $k_0 = k(\omega_0)$  correspondendo a uma propagante monocromática. A onda monocromática em  $z = 0$  propaga-se sem alterar sua forma, como já era de se esperar. Por outro lado, se a onda estende-se por um tempo finito  $T$ , sendo então localizada, a amplitude  $A(\omega)$  deixa de ser uma função delta, e a onda resultante apresenta um espectro de frequências  $\omega$ , de valor  $\Delta\omega$ , sendo, portanto, policromática. É fácil perceber que, quanto mais localizada for a onda em  $z = 0$  ( $T$  menor), maior será o espectro de frequências  $\Delta\omega$  que a compõe. A medida que o tempo passa e a onda se propaga, sua forma se modifica, porque as ondas monocromáticas que a compõem deslocam-se com velocidades de fase diferentes se o meio é dispersivo. Se o meio é apenas fracamente dispersivo, isto é, se  $k$  é praticamente uma função linear de  $\omega$ , ou se o espectro  $\Delta\omega$  não é muito largo, então podemos expandir  $k(\omega)$  em torno de um valor  $\omega_0$  característico da onda, ou seja,

$$k(\omega) = k(\omega_0) + (\omega - \omega_0) \left. \frac{dk}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_0} + \frac{(\omega - \omega_0)^2}{2} \left. \frac{d^2k}{d\omega^2} \right|_{\omega=\omega_0} + \dots \quad (1.31)$$

ou, simplificando a notação e mantendo termos até primeira ordem apenas,

$$k(\omega) = k_0 + (\omega - \omega_0) \left. \frac{dk}{d\omega} \right|_0. \quad (1.32)$$

Utilizando essa expressão na equação (1.26), obtemos

$$u(z, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) \exp \left\{ i \left[ k_0 + (\omega - \omega_0) \left. \frac{dk}{d\omega} \right|_0 \right] z - i\omega t \right\} d\omega \quad (1.33)$$

ou

$$u(z, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ i \left( k_0 - \omega_0 \left. \frac{dk}{d\omega} \right|_0 \right) z \right\} \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) \exp \left\{ i\omega z \left. \frac{dk}{d\omega} \right|_0 - i\omega t \right\} d\omega \quad (1.34)$$

ou ainda

$$u(z, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i(k_0 - \omega_0 \left. \frac{dk}{d\omega} \right|_0)z} \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) e^{-i\omega(t - z \left. \frac{dk}{d\omega} \right|_0)} d\omega. \quad (1.35)$$

Fazendo a transformada inversa da equação (1.27), obtemos

$$u(0, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) e^{-i\omega t} d\omega. \quad (1.36)$$

Definindo

$$\begin{aligned}t' &= t - z \left. \frac{dk}{d\omega} \right|_0 \\ dt' &= dt\end{aligned}$$

a equação (1.35) torna-se

$$u(z, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i(k_0 - \omega_0 \left. \frac{dk}{d\omega} \right|_0)z} \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) e^{-i\omega t'} d\omega \quad (1.37)$$

que é matematicamente idêntica à equação (1.36) (excetuando-se o fator exponencial que multiplica a integral), de modo que, trocando  $t$  por  $t'$

$$u(z, t) = u\left(0, t - z \left. \frac{dk}{d\omega} \right|_0\right) e^{i(k_0 - \omega_0 \left. \frac{dk}{d\omega} \right|_0)z}. \quad (1.38)$$

Assim, a forma da onda policromática praticamente se mantém, apesar de sofrer uma defasagem como um todo, dada pelo fator exponencial multiplicativo.

## 1.4 Dispersão e absorção

Ondas eletromagnéticas propagando-se num material podem atuar sobre os constituintes do material, transferindo energia para eles. Esses constituintes podem ser átomos, moléculas, íons ou elétrons livres ou ligados a átomos do material. Nesse caso, uma parcela da energia eletromagnética da onda é absorvida e pode ser transformadas noutras formas de energia, como vibracional ou translacional, por exemplo. Além disso, essa absorção pode ocorrer de forma diferente quando ondas de frequências diferentes propagam-se no material, de modo que ocorre o fenômeno da dispersão. Nesse caso as grandezas que caracterizam o material,  $\mu$  e  $\varepsilon$ , assim como a velocidade da onda, passam a depender da frequência da onda incidente, já que  $\vec{v}$  é definida pelas grandezas acima. O meio, nesse caso, é chamado de dispersivo. Para estudar a absorção e a dispersão que ocorrem com as ondas eletromagnéticas, podemos considerar um modelo simples clássico para a interação

entre a onda e os átomos ou moléculas do meio. Tal modelo, conhecido como modelo de Lorentz, consiste em considerar os elétrons do material como osciladores harmônicos amortecidos forçados pelo campo eletromagnético da onda incidente [10]. A Figura 1.1 ilustra esse modelo simples.

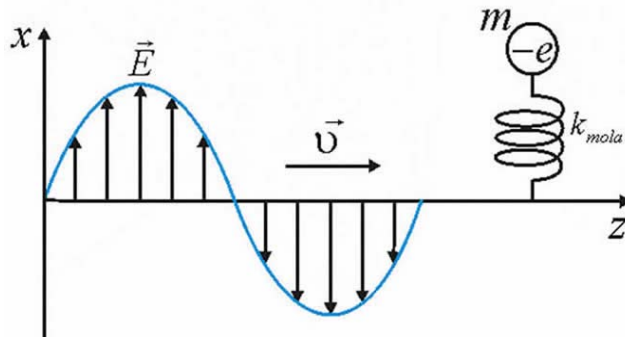


Figura 1.1: Modelo simples para um elétron para estudo da absorção e dispersão.

Na figura, vemos um elétron representado por um ponto de massa  $m$  e carga  $-e$  que oscila sujeito a um campo elétrico orientado na direção  $x$ , considerando que o núcleo do átomo fique em repouso. A parte magnética da onda pode ser desprezada em comparação com o efeito produzido pelo campo elétrico. Assim, age sobre o elétron uma força restauradora descrita por uma expressão semelhante a lei de Hooke, ou seja, em módulo,

$$F_j = k_j x_j \quad (1.39)$$

onde  $k_j$  é a constante da mola associada ao elétron  $j$  e  $x_j$  o seu deslocamento do equilíbrio. Além da força restauradora acima, possivelmente o elétron está sujeito a algum tipo de amortecimento. Podemos supor que uma forma funcional proporcional à velocidade, do tipo

$$F_{amort} = b_j \frac{dx_j}{dt} \quad (1.40)$$

onde  $b_j$  representa o amortecimento. O sistema está sujeito ao campo externo, que pode

ser escrito de maneira simplificada como

$$\vec{E}(z, t) = \vec{E}_0 \cos \omega t = E_0 \cos \omega t \hat{i} \quad (1.41)$$

ou, na forma complexa, mediante

$$\vec{E}(z, t) = \vec{E}_0 e^{-i\omega t} = E_0 e^{-i\omega t} \hat{i} \quad (1.42)$$

sendo que estamos considerando uma onda incidente monocromática. Assim, a equação de movimento do elétron pode ser escrita como

$$m \frac{d^2 x_j}{dt^2} = -k_j x_j - b_j \frac{dx_j}{dt} - eE \quad (1.43)$$

onde o último termo representa a força elétrica agindo sobre o elétron. A equação acima pode ser reescrita considerando uma coordenada  $x_j$  complexa e lembrando de tomar a parte real da solução posteriormente, isto é,

$$m \frac{d^2 x_j}{dt^2} + b_j \frac{dx_j}{dt} + k_j x_j = -eE \quad (1.44)$$

ou

$$\frac{d^2 x_j}{dt^2} + \gamma_j \frac{dx_j}{dt} + \omega_{0_j}^2 x_j = -e \frac{E_0}{m} e^{-i\omega t} \quad (1.45)$$

onde

$$\omega_{0_j}^2 = \frac{k_j}{m}$$

é a frequência natural do sistema e

$$\gamma_j = \frac{b_j}{m}.$$

A equação acima representa um oscilador harmônico forçado. A solução da equação consiste numa solução transiente, obtida a partir da equação homogênea correspondente, somada a uma solução particular estacionária. A solução transiente se anula decorrido um certo intervalo de tempo, de modo que interessa-nos apenas a solução particular, que pode ser obtida se considerarmos que

$$x_j(t) = x_0 e^{-i\omega t} \quad (1.46)$$

onde  $x_0$  é uma posição inicial. Vamos precisar também de

$$\frac{dx_j}{dt} = -i\omega x_{0j} e^{-i\omega t} \quad (1.47)$$

e

$$\frac{d^2x_j}{dt^2} = -\omega^2 x_{0j} e^{-i\omega t} \quad (1.48)$$

de modo que a equação diferencial (1.45) fica

$$-\omega^2 x_{0j} e^{-i\omega t} + \gamma_j (-i\omega) x_{0j} e^{-i\omega t} + \omega_{0j}^2 x_{0j} e^{-i\omega t} = -\frac{eE_0}{m} e^{-i\omega t} \quad (1.49)$$

ou

$$\left( \omega_{0j}^2 - \omega^2 - i\gamma_j \omega \right) x_{0j} = -\frac{eE_0}{m} \quad (1.50)$$

e então

$$x_{0j} = -\frac{e}{m} \frac{1}{\omega_{0j}^2 - \omega^2 - i\gamma_j \omega} E_0 \quad (1.51)$$

de modo que achamos

$$x_j(t) = -\frac{e}{m} \frac{1}{\omega_{0j}^2 - \omega^2 - i\gamma_j \omega} E_0 e^{-i\omega t} \quad (1.52)$$

ou

$$x_j(t) = -\frac{e}{m} \frac{1}{\omega_{0j}^2 - \omega^2 - i\gamma_j \omega} E(t) \quad (1.53)$$

e vetorialmente,

$$\vec{x}_j(t) = -\frac{e}{m} \frac{1}{\omega_{0j}^2 - \omega^2 - i\gamma_j \omega} \vec{E}(t). \quad (1.54)$$

O movimento do elétron  $j$  dá origem a um momento de dipolo elétrico dado por

$$\vec{p}_j(t) = -e \vec{x}_j(t) \quad (1.55)$$

ou

$$\vec{p}_j(t) = \frac{e^2}{m} \frac{1}{\omega_{0j}^2 - \omega^2 - i\gamma_j \omega} \vec{E}(t). \quad (1.56)$$

Considerando que nosso meio seja um gás e que existam  $N$  moléculas por unidade de volume do gás e, uma fração  $f_j$  desses elétrons tenha uma frequência natural  $\omega_{0j}$ , a polarização do gás é dada pela soma dos momentos de dipolo por unidade de volume, ou seja,

$$\vec{P} = \frac{1}{V} \sum_i \vec{p}_i \quad (1.57)$$

ou, na forma complexa, já substituindo a expressão (1.56)

$$\vec{P} = \sum_j N f_j \vec{p}_j(t) = \sum_j \frac{N f_j e^2}{m} \frac{1}{\omega_{0j}^2 - \omega^2 - i\gamma_j \omega} \vec{E} \quad (1.58)$$

ou

$$\vec{P} = \left[ \frac{N e^2}{m} \sum_j \frac{f_j}{\omega_{0j}^2 - \omega^2 - i\gamma_j \omega} \right] \vec{E}. \quad (1.59)$$

Para um grande número de materiais, a polarização  $\vec{P}$  pode ser associada ao campo elétrico  $\vec{E}$  através de

$$\vec{P} = \chi \vec{E} \quad (1.60)$$

agora, pela relação acima, o termo entre colchetes na equação (1.59) pode ser identificado com a susceptibilidade elétrica (complexa) do material, ou seja,

$$\chi = \frac{N e^2}{m} \sum_j \frac{f_j}{\omega_{0j}^2 - \omega^2 - i\gamma_j \omega} \quad (1.61)$$

lembrando que  $\chi = \Re[\chi]$ . A susceptibilidade elétrica é uma propriedade do material que está associada também à permissividade, já que podemos escrever

$$\chi = \varepsilon - \varepsilon_0. \quad (1.62)$$

Existe ainda uma outra grandeza importante, a constante dielétrica do meio, que é a razão entre a permissividade elétrica  $\varepsilon$  do meio dielétrico e a permissividade  $\varepsilon_0$  do vácuo,

$$K = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}. \quad (1.63)$$

Assim, podemos reescrevê-la em termos de  $\chi$ , ou seja

$$K = \frac{\chi + \varepsilon_0}{\varepsilon_0} = 1 + \frac{\chi}{\varepsilon_0} \quad (1.64)$$

de modo que, usando a equação (1.61), obtemos

$$K = 1 + \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m} \sum_j \frac{f_j}{\omega_{0j}^2 - \omega^2 - i\gamma_j \omega} \quad (1.65)$$

que também pode ser escrita como

$$\frac{\varepsilon(\omega)}{\varepsilon_0} = 1 + \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m} \sum_j \frac{f_j}{\omega_{0j}^2 - \omega^2 - i\gamma_j \omega}. \quad (1.66)$$

Assim, observamos que a permissividade elétrica do meio depende da frequência  $\omega$  da onda incidente, caracterizando o meio como dispersivo. O amortecimento descrito pelas constantes  $\gamma_j$  é, em geral, muito pequeno quando comparado com as frequências naturais ou de ressonância  $\omega_{0j}$ , de modo que  $\varepsilon(\omega)$  é basicamente real em todas as frequências, exceto quando  $\omega$  está muito próximo de uma das frequências de ressonância  $\omega_{0j}$ . Além disso, quando  $\omega$  é menor do que  $\omega_{0\min}$ , que é a menor frequência de ressonância, todos os termos da soma acima são positivos e  $\varepsilon$  é maior do que  $\varepsilon_0$ . À medida que  $\omega$  aumenta, a soma diminui e eventualmente torna-se negativa, fazendo com que  $\varepsilon$  fique menor do que  $\varepsilon_0$ .

Uma situação interessante ocorre quando  $\omega$  está próximo a um dos  $\omega_{0j}$ , o que faz com que a parte imaginária de  $\varepsilon$  torne-se apreciável. Exatamente em  $\omega = \omega_{0j}$  ocorre uma ressonância, e  $\varepsilon$  torna-se imaginária pura. Lembrando que a parte imaginária de  $\varepsilon$  está relacionada com absorção da onda pelo meio, vemos que, ao colocarmos o sistema próximo a uma de suas ressonâncias, uma grande parte da onda deveria mesmo ser absorvida, de modo que qualitativamente o modelo utilizado é apropriado. As regiões em que a parte imaginária de  $\varepsilon(\omega)$  é grande são chamadas de zonas de absorção ressonante, e o material torna-se opaco.



Vamos agora relacionar  $\varepsilon$  com o índice de refração do material. Sabemos que

$$n = \sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{\mu_0\varepsilon_0}}. \quad (1.67)$$

Vamos nos restringir a meios não magnéticos ou fracamente magnéticos, de modo que  $\mu \approx \mu_0$ . Então, como  $\varepsilon$  é complexo, temos um índice de refração complexo, ou seja,

$$n = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}} \quad (1.68)$$

ou, usando a equação (1.66),

$$n = \sqrt{1 + \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m} \sum_j \frac{f_j}{\omega_{0j}^2 - \omega^2 - i\gamma_j \omega}}. \quad (1.69)$$

Para meios como os gases, a somatória é pequena quando comparada com a unidade, de modo que podemos expandir a expressão acima e considerar apenas o primeiro termo da expansão, ou seja,

$$n = 1 + \frac{Ne^2}{2\varepsilon_0 m} \sum_j \frac{f_j}{\omega_{0j}^2 - \omega^2 - i\gamma_j \omega}. \quad (1.70)$$

Vamos reescrever esta expressão como

$$n = 1 + \frac{Ne^2}{2\varepsilon_0 m} \sum_j \frac{f_j}{\omega_{0j}^2 - \omega^2 - i\gamma_j \omega} \frac{\omega_{0j}^2 - \omega^2 + i\gamma_j \omega}{\omega_{0j}^2 - \omega^2 + i\gamma_j \omega} \quad (1.71)$$

ou

$$n = 1 + \frac{Ne^2}{2\varepsilon_0 m} \sum_j \frac{f_j (\omega_{0j}^2 - \omega^2 + i\gamma_j \omega)}{(\omega_{0j}^2 - \omega^2) - \gamma_j^2 \omega^2}. \quad (1.72)$$

As partes real e imaginária desse índice de refração podem ser escritas como

$$n = n_R + in_I. \quad (1.73)$$

Assim, a parte real do índice de refração fica

$$n_R = \Re(n) = 1 + \frac{Ne^2}{2\varepsilon_0 m} \sum_j \frac{f_j (\omega_{0j}^2 - \omega^2)}{(\omega_{0j}^2 - \omega^2) - \gamma_j^2 \omega^2} \quad (1.74)$$

enquanto o termo imaginário, ligado à absorção, fica

$$n_I = \Im(n) = \frac{Ne^2\omega}{2\varepsilon_0 m} \sum_j \frac{f_j \gamma_j}{(\omega_{0j}^2 - \omega^2) - \gamma_j^2 \omega^2}. \quad (1.75)$$

Definindo o coeficiente de absorção  $\alpha$  através de

$$\alpha = 2n_I \quad (1.76)$$

temos

$$\alpha = \frac{Ne^2\omega}{\varepsilon_0 m} \sum_j \frac{f_j \gamma_j}{(\omega_{0j}^2 - \omega^2) - \gamma_j^2 \omega^2}. \quad (1.77)$$

O comportamento do índice de refração e do coeficiente de absorção próximo a uma ressonância pode ser visto na Figura 1.2.

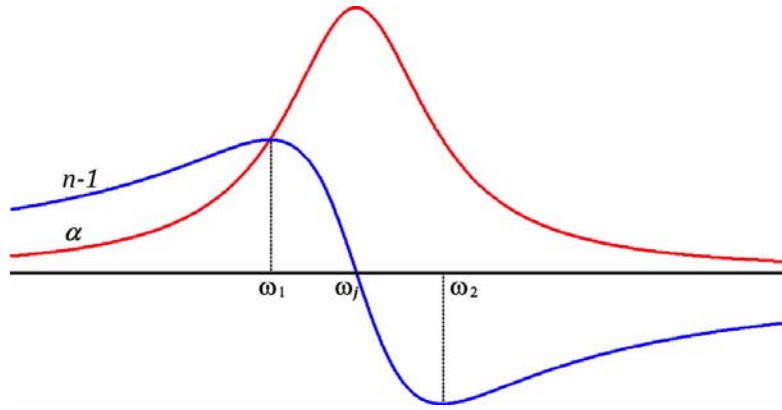


Figura 1.2: Índice de refração e coeficiente de absorção próximo a uma ressonância.

Na figura vemos que o índice de refração, para frequências menores que  $\omega_1$  ou maiores que  $\omega_2$ , cresce com a frequência, que é o comportamento normal esperado para essa grandeza. Entretanto, na faixa que vai de  $\omega_1 \leq \omega \leq \omega_2$  e que inclui uma das frequências de ressonância  $\omega_j$ , o índice de refração cai abruptamente, ao mesmo tempo em que o coeficiente de absorção torna-se apreciável. Essa região de comportamento inesperado para  $n$  é chamada de região de *dispersão anômala*.

## 1.5 Causalidade e relações de Kramers-Kronig

Nesta seção discutiremos a causalidade, no sentido que a resposta (perturbação) do sistema não existe antes que a força seja aplicada, ou seja, a causa deve preceder o efeito. Veremos que neste sentido, a causalidade em nossos sistemas está ligada às relações de Kramers-Kronig.

### 1.5.1 Não-localidade no tempo

Quando a permissividade elétrica  $\varepsilon$  é uma função de  $\omega$ , isto é,  $\varepsilon = \varepsilon(\omega)$ , ocorre uma conexão temporal não-local entre  $\vec{D}$  e  $\vec{E}$ , de modo que  $\vec{D}$  no tempo  $t$  depende de  $\vec{E}$  não apenas no tempo  $t$  como em outros valores de tempo. Se as componentes monocromáticas da frequência  $\omega$  forem relacionadas por

$$\vec{D}(\vec{x}, \omega) = \varepsilon(\omega) \vec{E}(\vec{x}, \omega) \quad (1.78)$$

a dependência em relação ao tempo pode ser construída pela superposição de Fourier. Tratando a coordenada espacial como um parâmetro, as integrais de Fourier no tempo e na frequência podem ser escritas como

$$\vec{D}(\vec{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{D}(\vec{x}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad (1.79)$$

e

$$\vec{D}(\vec{x}, \omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{D}(\vec{x}, t) e^{i\omega t} dt \quad (1.80)$$

sendo que, para o campo elétrico, temos

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{E}(\vec{x}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad (1.81)$$

ou

$$\vec{E}(\vec{x}, \omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{E}(\vec{x}, t) e^{i\omega t} dt. \quad (1.82)$$

Substituindo a equação (1.78) em (1.79), obtemos

$$\vec{D}(\vec{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(\omega) \vec{E}(\vec{x}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega. \quad (1.83)$$

Agora, utilizamos a expressão (1.82) de modo que

$$\vec{D}(\vec{x}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} \vec{E}(\vec{x}, t') e^{i\omega t'} dt'. \quad (1.84)$$

Lembrando que, a susceptibilidade elétrica é uma propriedade do material e está associada à permissividade na forma

$$\chi(\omega) = \varepsilon(\omega) - \varepsilon_0$$

vemos que podemos escrever

$$\varepsilon(\omega) = \chi(\omega) + \varepsilon_0$$

e então

$$\vec{D}(\vec{x}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (\chi(\omega) + \varepsilon_0) e^{-i\omega t} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} \vec{E}(\vec{x}, t') e^{i\omega t'} dt' \quad (1.85)$$

ou ainda

$$\begin{aligned} \vec{D}(\vec{x}, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{E}(\vec{x}, t') \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \chi(\omega) e^{i\omega(t'-t)} d\omega \right] dt' \\ &+ \frac{\varepsilon_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{E}(\vec{x}, t') \left[ \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t'-t)} d\omega \right] dt'. \end{aligned} \quad (1.86)$$

Usando a relação de ortogonalidade, vemos que a segunda integral entre colchetes na expressão acima resulta, na verdade, na função delta de Dirac, de modo que achamos

$$\begin{aligned} \vec{D}(\vec{x}, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{E}(\vec{x}, t') \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \chi(\omega) e^{i\omega(t'-t)} d\omega \right] dt' \\ &+ \frac{\varepsilon_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{E}(\vec{x}, t') 2\pi \delta(t - t') dt' \end{aligned} \quad (1.87)$$

ou

$$\vec{D}(\vec{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{E}(\vec{x}, t') \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \chi(\omega) e^{i\omega(t'-t)} d\omega \right] dt' + \varepsilon_0 \vec{E}(\vec{x}, t). \quad (1.88)$$

Agora, vamos definir

$$\tau = t - t'$$

$$d\tau = -dt'$$

$$t' = t - \tau$$

e assim

$$\begin{aligned} \vec{D}(\vec{x}, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{E}(\vec{x}, t - \tau) \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \chi(\omega) e^{-i\omega\tau} d\omega \right] \\ &\quad \times (-d\tau) + \varepsilon_0 \vec{E}(\vec{x}, t) \end{aligned} \quad (1.89)$$

que pode ser reescrita como

$$\vec{D}(\vec{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{E}(\vec{x}, t - \tau) \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \chi(\omega) e^{-i\omega\tau} d\omega \right] d\tau + \varepsilon_0 \vec{E}(\vec{x}, t). \quad (1.90)$$

Agora, definindo a transformada de Fourier da susceptibilidade elétrica através de

$$G(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \chi(\omega) e^{-i\omega\tau} d\omega \quad (1.91)$$

obtemos

$$\vec{D}(\vec{x}, t) = \varepsilon_0 \vec{E}(\vec{x}, t) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} G(\tau) \vec{E}(\vec{x}, t - \tau) d\tau. \quad (1.92)$$

Assim, pela relação acima,  $\vec{D}$  depende do valor de  $\vec{E}$  determinado não só para o tempo  $t$  (através do primeiro fator), mas também para outros valores de tempo além de  $t$  (por meio do segundo fator). Se  $\varepsilon(\omega)$  (e conseqüentemente,  $\chi(\omega)$ ) não depende de  $\omega$ , então a integral na equação (1.91) torna-se

$$\begin{aligned} G(\tau) &= \frac{\chi}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} d\omega \\ G(\tau) &= \frac{\chi}{\sqrt{2\pi}} 2\pi \delta(\tau) \\ G(\tau) &= \sqrt{2\pi} \chi \delta(\tau) \end{aligned} \quad (1.93)$$

de modo que a relação (1.92) entre  $\vec{D}$  e  $\vec{E}$  fica

$$\begin{aligned}\vec{D}(\vec{x}, t) &= \varepsilon_0 \vec{E}(\vec{x}, t) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{2\pi} \chi(\tau) \vec{E}(\vec{x}, t - \tau) d\tau \\ \vec{D}(\vec{x}, t) &= \varepsilon_0 \vec{E}(\vec{x}, t) + \chi \vec{E}(\vec{x}, t) \\ \vec{D}(\vec{x}, t) &= \varepsilon \vec{E}(\vec{x}, t)\end{aligned}$$

onde usamos o fato de que  $\varepsilon = \varepsilon_0 + \chi$ . Nesse caso particular,  $\vec{D}$  só depende de  $\vec{E}$  no tempo  $t$ . Em geral,  $\varepsilon = \varepsilon(\omega)$ , de modo que  $G(\tau)$  existe para valores não-nulos de  $\tau$  e há uma conexão temporal não-local entre  $\vec{D}$  e  $\vec{E}$ .

### 1.5.2 Modelo simples para $G(\tau)$

Para ilustrar o caráter da conexão implícita em (1.91) e (1.92), vamos considerar nosso modelo de oscilador harmônico que utilizamos para estudar meios dispersivos, o qual fornece a permissividade elétrica dada pela equação (1.66),

$$\frac{\varepsilon(\omega)}{\varepsilon_0} = 1 + \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m} \sum_j \frac{f_j}{\omega_{0j}^2 - \omega^2 - i\gamma_j \omega}.$$

Considerando, por simplicidade, uma única frequência de ressonância  $\omega_0$ , além das equações

$$Z = \sum_j f_j \tag{1.94}$$

que representa o número total de elétrons e

$$\omega_p^2 = \frac{Ne^2 Z}{\varepsilon_0 m} \tag{1.95}$$

que define a frequência de plasma  $\omega_p$  do meio, vemos que podemos escrever

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} \tag{1.96}$$

ou

$$\chi(\omega) = \varepsilon(\omega) - \varepsilon_0 = \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega}. \tag{1.97}$$

Nesse caso,  $G(\tau)$ , dada pela equação (1.91), fica

$$G(\tau) = \frac{\omega_p^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega\tau}}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} d\omega. \quad (1.98)$$

Para resolver a integral acima, devemos passá-la para o plano complexo e usar os teoremas de integrais de Cauchy. A função acima é analítica, exceto nos pólos simples dados por

$$\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega = 0 \quad (1.99)$$

ou, em termos de  $\omega$ ,

$$\omega_{\pm} = \frac{i\gamma \pm \sqrt{-\gamma^2 + 4\omega_0^2}}{-2} \quad (1.100)$$

que pode ser reescrita como

$$\omega_{\pm} = -i\frac{\gamma}{2} \mp \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}. \quad (1.101)$$

Definindo

$$\omega_1^2 = \omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4} \quad (1.102)$$

e

$$b = \frac{\gamma}{2} \quad (1.103)$$

achamos

$$\omega_{\pm} = -ib \mp \omega_1. \quad (1.104)$$

Note que os dois pólos estão localizados no semiplano complexo inferior. Assim, devemos nos preocupar apenas quando a integração for feita nessa região. Para efetuar a integração, fechamos a região considerando um semicírculo de raio  $R \rightarrow \infty$ , de modo que a integral sobre essa curva se anula. Quando  $\tau < 0$ , o fator  $e^{-i\omega\tau}$  no semiplano complexo superior é positivo e o semicírculo situa-se no semiplano complexo superior. Essa região não contém os pólos dados por (1.104), de forma que a integral, pelo teorema de Cauchy, se anula, isto é,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega\tau}}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} d\omega = \oint_S \frac{e^{-i\omega\tau}}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} d\omega = 0, \quad \tau < 0 \quad (1.105)$$

ou seja,

$$G(\tau) = 0, \quad \tau < 0. \quad (1.106)$$

Por outro lado, quando  $\tau > 0$ , a região é fechada por um semicírculo no semiplano complexo inferior, de modo que na região são encontrados os dois pólos simples. Assim, a solução da integral é igual a  $-2\pi i$  vezes os resíduos da integral nos dois pólos, de onde vem

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega\tau}}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} d\omega = 2\pi i \frac{e^{-i(-ib-\omega_1)\tau} - e^{-i(-ib+\omega_1)\tau}}{2\omega_1} \quad (1.107)$$

ou

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega\tau}}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} d\omega = \frac{2\pi i e^{-b\tau}}{\omega_1} \frac{e^{i\omega_1\tau} - e^{-i\omega_1\tau}}{2} \quad (1.108)$$

ou ainda,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega\tau}}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} d\omega = 2\pi e^{-b\tau} \frac{\sin(\omega_1\tau)}{\omega_1}. \quad (1.109)$$

Voltando agora à expressão para  $G$ , temos

$$G(\tau) = \frac{\omega_p^2}{\sqrt{2\pi}} 2\pi e^{-b\tau} \frac{\sin(\omega_1\tau)}{\omega_1} \quad (1.110)$$

ou

$$G(\tau) = \sqrt{2\pi}\omega_p^2 e^{-b\tau} \frac{\sin(\omega_1\tau)}{\omega_1}, \quad \tau > 0. \quad (1.111)$$

Podemos reunir os dois resultados expressos em (1.106) e (1.111) utilizando uma função degrau dada por

$$\Theta(\tau) = \begin{cases} 0, & \tau < 0 \\ 1, & \tau > 0 \end{cases} \quad (1.112)$$

e assim

$$G(\tau) = \sqrt{2\pi}\omega_p^2 e^{-b\tau} \frac{\sin(\omega_1\tau)}{\omega_1} \Theta(\tau) \quad (1.113)$$

de modo que a equação (1.92) fica

$$\vec{D}(\vec{x}, t) = \varepsilon_0 \vec{E}(\vec{x}, t) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{2\pi}\omega_p^2 e^{-b\tau} \frac{\sin(\omega_1\tau)}{\omega_1} \Theta(\tau) \vec{E}(\vec{x}, t - \tau) d\tau \quad (1.114)$$



ou, por causa da função degrau  $\Theta(\tau)$  que anula contribuições para  $\tau < 0$ , temos

$$\vec{D}(\vec{x}, t) = \varepsilon_0 \vec{E}(\vec{x}, t) + \frac{\omega_p^2}{\omega_1} \int_0^\infty \vec{E}(\vec{x}, t - \tau) e^{-b\tau} \sin(\omega_1 \tau) d\tau. \quad (1.115)$$

É importante notar que o fator  $t - \tau$  em  $\vec{E}(\vec{x}, t - \tau)$ , combinado com os limites de integração, faz com que apenas tempos menores ou iguais a  $t$  contribuam para o deslocamento elétrico  $\vec{D}$  em  $t$ , fazendo com que a relação entre  $\vec{D}$  e  $\vec{E}$  seja causal, de acordo, portanto com nossa intuição física.

### 1.5.3 Causalidade e domínio de analiticidade de $\varepsilon(\omega)$

O aspecto mais óbvio e fundamental da equação (1.113) é o de que ela é nula para  $\tau < 0$ . Isto quer dizer que no instante  $t$ , somente os valores do campo elétrico anteriores a este instante contribuem para determinar o deslocamento, de acordo com a nossa idéia fundamental da causalidade nos fenômenos físicos. A equação (1.92) pode portanto ser escrita

$$\vec{D}(\vec{x}, t) = \varepsilon_0 \vec{E}(\vec{x}, t) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty G(\tau) \vec{E}(\vec{x}, t - \tau) d\tau. \quad (1.116)$$

Esta é, na realidade, a relação causal mais geral, espacialmente localizada e linear que se pode escrever entre  $\vec{D}$  e  $\vec{E}$  num meio isotrópico e uniforme. A sua validade transcende qualquer modelo específico de  $\varepsilon(\omega)$ . Da equação (1.91), a susceptibilidade elétrica pode ser expressa em termos de  $G(\tau)$  através de sua inversa como

$$\chi(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty G(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau. \quad (1.117)$$

Esta relação tem diversas conseqüências interessantes. Da realidade de  $\vec{D}$  e  $\vec{E}$ , e portanto de  $G(\tau)$ , na equação (1.116), podemos deduzir de (1.117) que, no caso de  $\omega$  complexo,

$$\chi^*(\omega^*) = \chi(-\omega). \quad (1.118)$$

A equação (1.117) também pode ser entendida como sendo a representação complexa de  $\chi(\omega)$  no plano complexo  $\omega$ , de forma que, se  $G(\tau)$  não possui singularidade, ou seja, é

finita para todo  $\tau$ , a função  $\chi(\omega)$  é analítica no semiplano complexo superior. Aqui, é preciso fazer a suposição fisicamente razoável de que  $G(\tau) \rightarrow 0$  quando  $\tau \rightarrow \infty$ , de modo a manter a analiticidade da função no eixo real. Com essa hipótese, claramente válida para dielétricos, podemos realizar uma integração por partes na equação (1.117) e obter

$$\chi(\omega) = \left[ G(\tau) \frac{e^{i\omega\tau}}{i\omega} \right]_0^\infty - \frac{1}{i\omega\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty G'(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau \quad (1.119)$$

ou

$$\chi(\omega) = \frac{iG(0)}{\omega} + \frac{i}{\omega\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty G'(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau. \quad (1.120)$$

Usando novamente uma integração por partes, temos

$$\chi(\omega) = \frac{iG(0)}{\omega} + \frac{i}{\omega\sqrt{2\pi}} \left[ G'(\tau) \frac{e^{i\omega\tau}}{i\omega} \right]_0^\infty - \frac{i}{i\omega^2\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty G''(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau \quad (1.121)$$

ou

$$\chi(\omega) = \frac{iG(0)}{\omega} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{G'(0)}{\omega^2} - \frac{1}{\omega^2\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty G''(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau. \quad (1.122)$$

Continuando o processo acima, percebemos que  $\chi(\omega)$  pode ser escrito na forma de uma expansão como uma série de Taylor

$$\chi(\omega) = \frac{iG(0)}{\omega} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{G'(0)}{\omega^2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{G''(0)}{\omega^3} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{G'''(0)}{\omega^4} + \dots \quad (1.123)$$

onde o argumento de  $G(\tau)$  e suas derivadas é dado por  $\tau = 0^+$ . Como  $G(0^-) = 0$ , e como não há sentido em ter  $G(\tau)$  descontínua em  $\tau = 0$ , devemos ter  $G(0^+) = 0$ . Assim ficamos com

$$\chi(\omega) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{G'(0)}{\omega^2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{G''(0)}{\omega^3} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{G'''(0)}{\omega^4} + \dots \quad (1.124)$$

de modo que as partes real e imaginária de  $\chi(\omega)$  são dominadas pelos termos

$$\Re[\chi(\omega)] = O\left(\frac{1}{\omega^2}\right) \quad (1.125)$$

e

$$\Im[\chi(\omega)] = O\left(\frac{1}{\omega^3}\right). \quad (1.126)$$

Lembrando que  $\chi(\omega) = \varepsilon(\omega) - \varepsilon_0$ , temos

$$\chi(\omega) = \varepsilon(\omega) - \varepsilon_0 = \varepsilon_0 \left( \frac{\varepsilon(\omega)}{\varepsilon_0} - 1 \right) \quad (1.127)$$

de modo que podemos reescrever as equações envolvendo  $\chi(\omega)$  para colocá-las numa forma mais usual, isto é,

$$\Re\left[\frac{\varepsilon(\omega)}{\varepsilon_0} - 1\right] = O\left(\frac{1}{\omega^2}\right) \quad (1.128)$$

e

$$\Im\left[\frac{\varepsilon(\omega)}{\varepsilon_0}\right] = O\left(\frac{1}{\omega^3}\right). \quad (1.129)$$

Essas formas assintóticas dependem somente da possibilidade de um desenvolvimento de  $G(\tau)$  em série de Taylor nas vizinhanças de  $\tau = 0^+$ .

### 1.5.4 Relações de Kramers-Kronig

Sendo  $\chi(\omega)$  analítica no plano complexo superior, também o é a função

$$f(\omega) = \frac{\varepsilon(\omega)}{\varepsilon_0} - 1 \quad (1.130)$$

essa analiticidade no semiplano superior possibilita o uso do teorema de Cauchy para relacionar as partes real e imaginária de  $\varepsilon(\omega)/\varepsilon_0$  sobre o eixo real. Para qualquer ponto  $z$  dentro de uma curva fechada  $C$  no semiplano superior  $\omega$ , o teorema de Cauchy dá

$$\frac{\varepsilon(z)}{\varepsilon_0} = 1 + \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{[\varepsilon(\omega')/\varepsilon_0 - 1]}{\omega' - z} d\omega'. \quad (1.131)$$

Escolhe-se agora a curva  $C$  constituindo-se pelo eixo real de  $\omega$  e um semicírculo de raio  $R \rightarrow \infty$  no semiplano complexo superior. Com a expansão assintótica que acabamos de discutir, vemos que  $\varepsilon/\varepsilon_0 - 1$  se anula com suficiente rapidez no infinito, de modo que

a semicircunferência em nada contribui para a integral. Portanto, a integral de Cauchy pode ser escrita como

$$\frac{\varepsilon(z)}{\varepsilon_0} = 1 + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[\varepsilon(\omega')/\varepsilon_0 - 1]}{\omega' - z} d\omega' \quad (1.132)$$

onde  $z$  é agora qualquer ponto no semiplano superior e a integral se efetua sobre o eixo real. Tomando o limite quando a frequência complexa se aproxima do eixo real, vindo de cima, escreveremos  $z = \omega + i\delta$  em (1.132):

$$\frac{\varepsilon(\omega)}{\varepsilon_0} = 1 + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[\varepsilon(\omega')/\varepsilon_0 - 1]}{\omega' - \omega - i\delta} d\omega'. \quad (1.133)$$

Para  $\omega$  real a presença de  $i\delta$  no denominador é um lembrete para distorcer o contorno ao longo do eixo real, dando-lhe um pequeno desvio semicircular *para baixo* no ponto  $\omega' = \omega$ . O denominador pode ser escrito formalmente como

$$\frac{1}{\omega' - \omega - i\delta} = P\left(\frac{1}{\omega' - \omega}\right) + \pi i\delta(\omega' - \omega) \quad (1.134)$$

onde  $P$  é a parte principal. A função delta serve para se levar em conta a contribuição do pequeno semicírculo, percorrido no sentido positivo, em torno do pólo em  $\omega' = \omega$ . Usando a equação (1.134) e efetuando um rearranjo simples, a equação (1.133) fica

$$\frac{\varepsilon(\omega)}{\varepsilon_0} = 1 - \frac{i}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[\varepsilon(\omega')/\varepsilon_0 - 1]}{\omega' - \omega} d\omega'. \quad (1.135)$$

As partes real e imaginária desta equação são

$$\Re\left[\frac{\varepsilon(\omega)}{\varepsilon_0}\right] = 1 + \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Im[\varepsilon(\omega')/\varepsilon_0]}{\omega' - \omega} d\omega' \quad (1.136)$$

$$\Im\left[\frac{\varepsilon(\omega)}{\varepsilon_0}\right] = -\frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Re[\varepsilon(\omega')/\varepsilon_0 - 1]}{\omega' - \omega} d\omega'. \quad (1.137)$$

Estas relações, são conhecidas como as *relações de Kramers-Kronig*. Foram deduzidas pela primeira vez por H. A. Kramers (1927) e independentemente por R. de L. Kronig

(1926). Utilizando a aproximação adotada em (1.116) podemos expressar essas relações em termos do índice de refração do meio, de forma que a equação (1.135) fica

$$n(\omega) = 1 - \frac{i}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[n(\omega') - 1]}{\omega' - \omega} d\omega' \quad (1.138)$$

e as partes real e imaginária desta equação são

$$n(\omega) = 1 + \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{n_I(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega' \quad (1.139)$$

$$n(\omega) = -\frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[n_R(\omega') - 1]}{\omega' - \omega} d\omega'. \quad (1.140)$$

A propriedade de simetria (1.118) mostra que  $\Re[\varepsilon(\omega)]$  é par em, enquanto  $\Im[\varepsilon(\omega)]$  é ímpar. Nesse caso, podemos reescrever as equações (1.136) e (1.137) para compreenderem apenas frequências positivas. Para a equação (1.136), temos

$$\Re \left[ \frac{\varepsilon(\omega)}{\varepsilon_0} \right] = 1 + \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^0 \frac{\Im[\varepsilon(\omega')/\varepsilon_0]}{\omega' - \omega} d\omega' + \frac{1}{\pi} P \int_0^{\infty} \frac{\Im[\varepsilon(\omega')/\varepsilon_0]}{\omega' - \omega} d\omega'. \quad (1.141)$$

Na primeira integral, fazemos

$$\begin{aligned} \omega' &\longrightarrow -\omega' \\ d\omega' &\longrightarrow -d\omega' \end{aligned}$$

e ela fica

$$\Re \left[ \frac{\varepsilon(\omega)}{\varepsilon_0} \right] = 1 + \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^0 \frac{\Im[\varepsilon(-\omega')/\varepsilon_0]}{-\omega' - \omega} (-d\omega') + \frac{1}{\pi} P \int_0^{\infty} \frac{\Im[\varepsilon(\omega')/\varepsilon_0]}{\omega' - \omega} d\omega' \quad (1.142)$$

ou então, considerando que  $\Im[\varepsilon(\omega)]$  é ímpar e que mudar a ordem dos limites de integração troca o sinal da integral,

$$\Re \left[ \frac{\varepsilon(\omega)}{\varepsilon_0} \right] = 1 + \frac{1}{\pi} P \int_0^{\infty} \frac{\Im[\varepsilon(\omega')/\varepsilon_0]}{\omega' + \omega} d\omega' + \frac{1}{\pi} P \int_0^{\infty} \frac{\Im[\varepsilon(\omega')/\varepsilon_0]}{\omega' - \omega} d\omega' \quad (1.143)$$

então

$$\Re \left[ \frac{\varepsilon(\omega)}{\varepsilon_0} \right] = 1 + \frac{2}{\pi} P \int_0^{\infty} \frac{\omega' \Im[\varepsilon(\omega')/\varepsilon_0]}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega'. \quad (1.144)$$

A outra equação dada por (1.137), fica

$$\Im \left[ \frac{\varepsilon(\omega)}{\varepsilon_0} \right] = -\frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^0 \frac{\Re[\varepsilon(\omega')/\varepsilon_0 - 1]}{\omega' - \omega} d\omega' - \frac{1}{\pi} P \int_0^{\infty} \frac{\Re[\varepsilon(\omega')/\varepsilon_0 - 1]}{\omega' - \omega} d\omega'$$

ou, usando a mesma substituição feita no caso anterior,

$$\Im \left[ \frac{\varepsilon(\omega)}{\varepsilon_0} \right] = -\frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^0 \frac{\Re[\varepsilon(-\omega')/\varepsilon_0 - 1]}{-\omega' - \omega} (-d\omega') - \frac{1}{\pi} P \int_0^{\infty} \frac{\Re[\varepsilon(\omega')/\varepsilon_0 - 1]}{\omega' - \omega} d\omega'$$

ou

$$\Im \left[ \frac{\varepsilon(\omega)}{\varepsilon_0} \right] = \frac{1}{\pi} P \int_0^{\infty} \frac{\Re[\varepsilon(\omega')/\varepsilon_0 - 1]}{\omega' + \omega} d\omega' - \frac{1}{\pi} P \int_0^{\infty} \frac{\Re[\varepsilon(\omega')/\varepsilon_0 - 1]}{\omega' - \omega} d\omega'$$

e então

$$\Im \left[ \frac{\varepsilon(\omega)}{\varepsilon_0} \right] = -\frac{2\omega}{\pi} P \int_0^{\infty} \frac{\Re[\varepsilon(\omega')/\varepsilon_0 - 1]}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega'. \quad (1.145)$$

As equações (1.144) e (1.145) acima também são conhecidas como relações de Kramers-Kronig e de forma análoga as equações (1.139) e (1.140), podem se reescritas em termos do índice de refração

$$n_R(\omega) = 1 + \frac{2}{\pi} P \int_0^{\infty} \frac{\omega' n_I(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega' \quad (1.146)$$

$$n_I(\omega) = -\frac{2\omega}{\pi} P \int_0^{\infty} \frac{[n_R(\omega') - 1]}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega'. \quad (1.147)$$

As relações de Kramers-Kronig são de validade muito geral, sendo consequência de pouco mais que a hipótese da conexão causal (1.116) entre a polarização e campo elétrico. O conhecimento empírico de  $\Im[\varepsilon(\omega)]$ , a partir de investigações sobre absorção, por exemplo, permite o cálculo de  $\Re[\varepsilon(\omega)]$  a partir da equação (1.144). As relações contêm a conexão entre a absorção e a dispersão anômala, que aparece na Figura 1.2.

## 1.6 Velocidade da informação e a causalidade de Einstein

Os principais argumentos para as relações de Kramers-Kronig na seção anterior foram baseados na causalidade, no sentido de que a ‘Saída’ de um sistema linear é invariável no

tempo e não pode preceder a ‘Entrada’. A estranha exigência que nenhuma informação pode ser transmitida com uma velocidade superior a  $c$  é muitas vezes referida como a causalidade de Einstein [11]. Suponha que um evento em  $(x, t)$  seja a causa de um evento em  $(x + \Delta x, t + \Delta t)$  através de alguma informação com velocidade  $u$ . Em algum outro referencial com velocidade  $v$  relativa ( $< c$ ) ao primeiro, o intervalo de tempo entre os dois eventos é

$$\Delta t' = \frac{\Delta t - (v/c^2) \Delta x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{\Delta t (1 - (u/c^2) (\Delta x/\Delta t))}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (1.148)$$

ou

$$\Delta t' = \frac{\Delta t (1 - uv/c^2)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (1.149)$$

Então, uma velocidade da informação superluminal ( $u > c$ ) implicaria que existem velocidades  $v$  para as quais  $\Delta t$  e  $\Delta t'$  têm sinais opostos: a ordem temporal de ‘causa’ e ‘efeito’ seria diferente para observadores diferentes. Ou seja, se dois eventos ocorrem em locais diferentes ao mesmo tempo para um observador, eles podem ocorrer em tempos diferentes para outro observador. Se esses dois eventos estão relacionados — um é a causa e o outro seu efeito — então o tempo observado e a distância entre eles podem ser usados para calcular a velocidade da informação que trafega entre eles. Se os dois eventos acontecem tão próximos no tempo, que um observador conclui que a informação viajou mais rápido do que  $c$ , a relatividade nos diz que o outro observador verá o efeito acontecer antes da causa. Como resultado, a *Relatividade Especial* e a *Causalidade*, portanto, proibem velocidades superluminais da informação. Mas o que, exatamente, define uma informação? Vamos abordar esta questão na seção seguinte, onde primeiramente vamos considerar algumas velocidades características de um pulso eletromagnético, em especial a velocidade de grupo, que caracteriza a velocidade de propagação do pulso e é muitas vezes, erradamente, assumida como sendo a velocidade do sinal.

## 1.7 Velocidades da luz

Pesquisas recentes têm demonstrado que é possível exercer extraordinário controle sobre a velocidade de propagação de pulsos de luz através de um meio material [3, 4, 12], bem como o controle da velocidade de propagação de pulsos elétricos em circuitos eletrônicos [6, 13]. Tanto a propagação extremamente lenta (muito mais lenta que a velocidade da luz no vácuo) quanto à propagação rápida (superior a velocidade da luz no vácuo) foram observadas. Para entender estes resultados, é importante definir algumas das velocidades características da luz. Nesta seção, introduziremos cinco importantes velocidades de uma onda eletromagnética em um meio material: a velocidade de fase, a velocidade de grupo, a velocidade do transporte de energia, a velocidade da frente e a velocidade do sinal ou informação.

### 1.7.1 Velocidade de fase e de grupo

Acredita-se que Lord Rayleigh tenha sido o primeiro a notar a diferença entre a velocidade de fase e de grupo [14]. Para revisar os conceitos básicos de velocidade de fase e de grupo [15], vamos iniciar considerando uma onda plana monocromática de frequência angular  $\omega$  propagando através de um meio de índice de refração  $n$ . Esta onda pode ser descrita por

$$E(z, t) = Ae^{i(kz - \omega t)} + c.c \quad (1.150)$$

onde  $k = n\omega/c$ . Nós definimos a velocidade de fase  $v_f$  como sendo a velocidade em que pontos de fase constante se movem através do meio. Uma vez que a fase da onda é, claramente, dada por

$$\phi = kz - \omega t \quad (1.151)$$



os pontos de fase constante se movem uma distância  $\Delta z$  num tempo  $\Delta t$ , que estão relacionados por

$$k\Delta z = \omega\Delta t. \quad (1.152)$$

Então  $v_f = \Delta z/\Delta t$  ou

$$v_f = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{n}. \quad (1.153)$$

Vamos considerar a propagação de um pulso através de um sistema material. Um pulso é, necessariamente, composto de uma distribuição de frequências ópticas, como ilustrado simbolicamente na Figura 1.3.

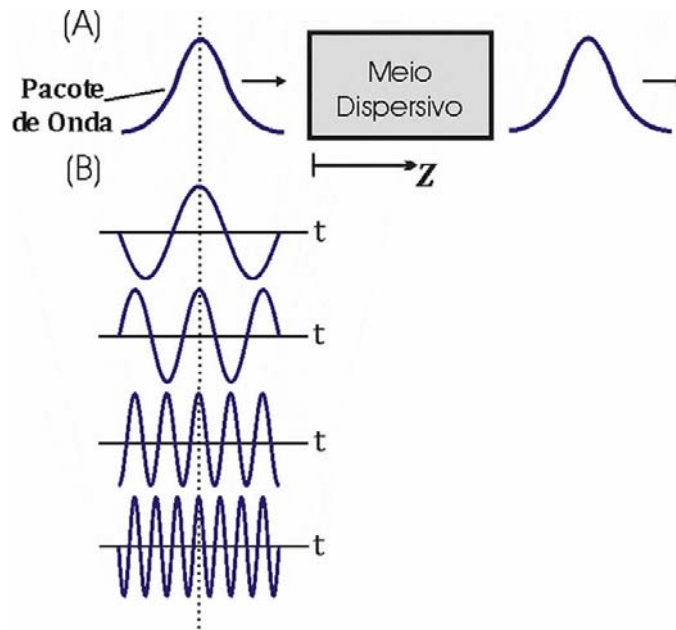


Figura 1.3: Representação esquemática de um pulso em termos das suas várias componentes. Note que essas contribuições somam em fase no pico do pulso.

No pico do pulso, as várias componentes de Fourier tendem a somar em fase. Se esse pulso se propaga sem distorção, essas componentes devem estar somando em fase para todos os valores da distância  $z$  de propagação. Para expressar matematicamente esse pensamento, primeiro escrevemos a fase da onda como

$$\phi = \frac{n\omega z}{c} - \omega t \quad (1.154)$$

e requeremos que não haja mudança em  $\phi$  para a primeira ordem em  $\omega$ . Ou seja,  $d\phi/d\omega = 0$  ou

$$\frac{dn}{d\omega} \frac{\omega z}{c} + \frac{nz}{c} - t = 0 \quad (1.155)$$

que pode ser escrita como  $z = v_g t$  onde a velocidade de grupo é dada por

$$v_g = \frac{c}{n + \omega dn/d\omega} = \frac{d\omega}{dk}. \quad (1.156)$$

A última igualdade nesta equação resulta do uso da relação  $k = n\omega/c$ . Como alternativa, podemos expressar este resultado em termos de um índice de refração de grupo  $n_g$  definido por

$$v_g = \frac{c}{n_g} \quad (1.157)$$

com

$$n_g = n + \omega \frac{dn}{d\omega} \quad (1.158)$$

Vemos que o índice de grupo difere do índice de fase por um termo que depende da dispersão  $dn/d\omega$  do índice de refração.

Um material com uma derivada  $dn/d\omega$  negativa é anormalmente dispersivo e apresenta propagação de pulso de luz rápida, enquanto um  $dn/d\omega$  positivo, chamado de dispersão normal, conduz à propagação de pulsos de luz lenta. A relação entre  $v_g$  e  $dn/d\omega$  é demonstrado graficamente na Figura 1.4.

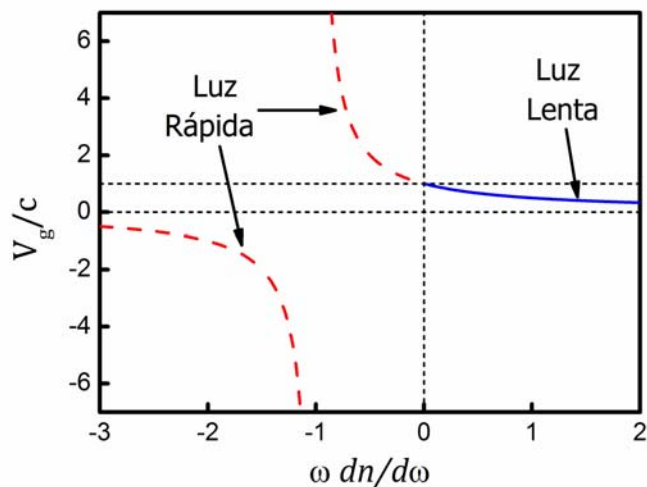


Figura 1.4: Velocidade de grupo como uma função da dispersão. Neste gráfico, para o qual  $n_0 = 1$ , a velocidade de grupo é demonstrada como uma função de  $\omega dn/d\omega$ . Para  $dn/d\omega$  positivo (dispersão normal),  $0 < v_g < c$  (curva sólida **azul**). Para  $dn/d\omega$  negativo (dispersão anômala),  $v_g > c$  ou  $v_g < 0$  (curva tracejada **vermelha**)

Note que a velocidade de grupo nos dá a velocidade com que um pulso de luz se propaga através de um sistema material. Deste modo, fala-se de “Luz Rápida” ou “Luz Lenta”, dependendo do valor da velocidade de grupo  $v_g$  em comparação com a velocidade  $c$  da luz no vácuo.

Luz lenta refere-se à situação em que  $v_g \ll c$ . De fato, velocidades de grupo menores que  $17 \text{ m/s}$  foram observadas experimentalmente [12]. Luz rápida refere-se a pulsos viajando mais rápido que a velocidade da luz no vácuo. Esta circunstância pode ocorrer quando  $v_g > c$  ou quando  $v_g$  é negativa. A velocidade de grupo negativa corresponde aos casos quando o pico do pulso, transmitido através de um meio óptico, emerge antes do pico do pulso de luz incidente entrar no meio [3].

Algumas dessas idéias podem ser compreendidas em termos da seqüência temporal demonstrada na Figura 1.5.

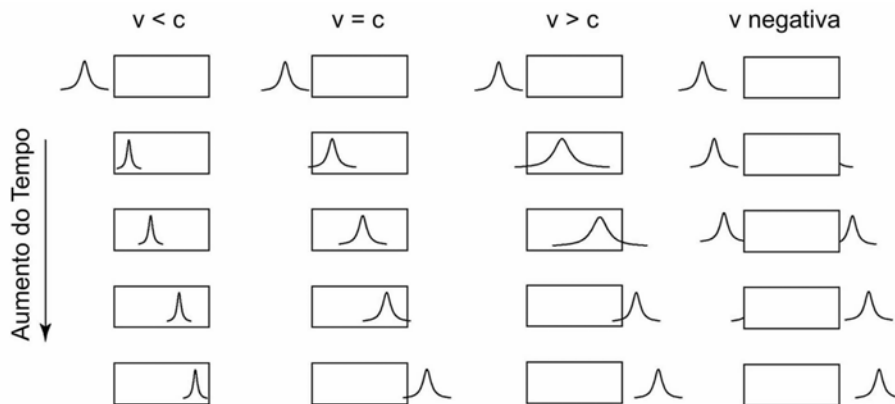


Figura 1.5: Representação esquemática de um pulso se propagando através de um meio com vários valores de velocidade de grupo.

É importante notar, também, que o tempo  $T$  que o pulso leva para atravessar o meio pode, em geral, se representado como

$$T = \frac{L}{v_g} \quad (1.159)$$

onde  $L$  é o comprimento físico do meio. Assim, quando  $v_g$  é negativa, o tempo que o pulso leva para atravessar o meio também será negativo.

Embora a propagação de pulsos em meios dispersivos, em geral, seja bastante complexa, aproximações da velocidade de grupo podem ser usadas freqüentemente para descrever o comportamento de pulsos nesses meios. Adequando a dispersão de meios óticos, pesquisadores têm feito a propagação de pulsos de luz rápida, luz lenta, e até a parada total de pulsos de luz. A existência de sistemas, no qual a velocidade de grupo  $v_g$  assume valores extremos, têm levantado discussões a respeito de qual seria a velocidade da informação, codificada em pulsos eletromagnéticos que viajam muito mais lento ou mais rápido do que  $c$ .

## 1.7.2 Velocidade do transporte de energia

A velocidade na qual a energia eletromagnética é transmitida através de um material é complicada, pelo fato de que parte da energia está armazenada no material e o restante está contido no campo eletromagnético. Formalmente, ela pode ser definida como a razão entre o vetor de Poynting e a densidade de energia armazenada da onda,

$$v_e = \mathbf{S}/W \quad (1.160)$$

no entanto, Loudon demonstrou que essa velocidade é igual a velocidade de grupo num meio dielétrico não absorvedor, mas é diferente na presença de um absorvedor [16]. Especificamente, ele foi capaz de escrever a forma fechada da expressão

$$v_e = \frac{c}{n_R + 2\omega n_I/\Gamma}, \quad (1.161)$$

onde  $\Gamma$  é coeficiente de amortecimento do oscilador de um material de Lorentz e  $n_R$  e  $n_I$  são as partes real e imaginária do índice de refração. Loudon também observou que essa velocidade é limitada por  $c$ .

## 1.7.3 Velocidade da frente

Velocidade da Frente é a velocidade de propagação da descontinuidade de uma função degrau em um pulso. Existem diferentes maneiras de mostrar que uma descontinuidade se move na velocidade  $c$  [2, 9, 11]. Vamos iniciar considerando o movimento de um onda da forma

$$f(t) = \Theta(t) \sin \omega t \quad (1.162)$$

onde  $\Theta(t)$  é a função degrau de Heaviside, e que também pode ser chamada de sinal. Devemos então, considerar que a descontinuidade ou a frente em  $t = 0$  se propaga com uma velocidade  $\leq c$  em qualquer meio; de outra forma, teríamos um sinal se propagando com uma velocidade maior que  $c$ , violando a relatividade especial.

A prova deste importante resultado pode ser dada a partir das equações (1.26)

$$E(z, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) e^{ik(\omega)z - i\omega t} d\omega$$

e (1.27)

$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} E(0, t') e^{i\omega t'} dt' \quad (1.163)$$

de onde vem que

$$E(z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(\omega)z - i\omega t} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} E(0, t') e^{i\omega t'} dt' \quad (1.164)$$

ou

$$E(z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(z, t - t') E(0, t') dt' \quad (1.165)$$

onde

$$G(z, t - t') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(\omega)z - i\omega(t-t')} d\omega, \quad (1.166)$$

fazendo

$$\begin{aligned} \tau &= t - t' \\ k(\omega) &= \frac{\omega n(\omega)}{c} \end{aligned}$$

temos

$$G(z, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(n(\omega)z/c - \tau)} d\omega. \quad (1.167)$$

Observando a equação (1.70) é razoável assumir que  $n(\omega) \rightarrow 1$  quando  $\omega \rightarrow \infty$ . Com esse pressuposto, segue-se que o integrando em (1.167) é  $\exp i\omega(z/c - \tau)$  para  $\omega$  grande. Assim, para  $z > c\tau$ , a integral acima pode ser substituída por uma integral de contorno envolvendo um grande semicírculo na metade superior do plano complexo  $\omega$  como visto na seção 1.5. Vamos lembrar ainda da seção 1.5 que a causalidade, no sentido de que não pode haver deslocamento antes que haja um campo elétrico para induzir o deslocamento,

exige que o índice de refração  $n(\omega)$  seja analítico, na metade superior do plano complexo  $\omega$ . Assim, para  $z > c\tau$ , a integral (1.165) desaparece:

$$G(z, t) = 0 \quad \text{para } \tau < z/c \quad (1.168)$$

Segue-se a partir da equação (1.165) que se o campo incidente  $E(0, t) = 0$  para todo  $t < 0$ , então o campo  $E(z, t) = 0$  para todo  $t < z/c$ . Em outras palavras, temos o resultado desejado, que a 'frente' ou 'descontinuidade' da onda, tal como (1.162) não pode se propagar com um velocidade maior que  $c$ . Na verdade, a velocidade da frente é exatamente  $c$ .

#### 1.7.4 Velocidade de sinal ou informação

Sabe-se há mais de um século que a velocidade de grupo de pulsos eletromagnéticos pode exceder  $c$ . Antes de Einstein formular sua teoria especial da relatividade, a possibilidade de velocidades de grupo maiores que  $c$  não eram uma preocupação. A relatividade especial afirma que a velocidade da luz no vácuo,  $c$ , é uma velocidade limite que não pode ser excedida por nenhuma entidade capaz de transportar matéria ou informação.

O conceito de velocidade de sinal, o que hoje chamamos de informação, foi introduzido pela primeira vez por Sommerfeld e Brillouin devido preocupações de que a propagação de um pulso superluminal em um material com dispersão anômala poderia contradizer as previsões da relatividade especial. Eles notaram que uma distinção deveria ser feita entre a velocidade de grupo e a velocidade do sinal, em particular, eles queriam definir a velocidade de um sinal de tal forma que a relatividade fosse satisfeita durante a propagação do pulso através de todos os tipos de meios; o que é conhecido como a causalidade de Einstein. Obviamente, causalidade, no sentido de que o efeito não pode preceder a causa também é satisfeita. No entanto, ao contrário das outras velocidades características do pulso, a velocidade da informação é difícil de definir, devido à dificuldade na definição de

“*Informação*”. O conceito de velocidade da informação torna-se particularmente importante em um material com dispersão anômala, uma vez que, por muito tempo acreditou-se que a  $v_g$  era a velocidade da informação.

Eventualmente, Sommerfeld e Brillouin propuseram que a velocidade de uma descontinuidade presente na frente de um pulso, a velocidade da frente, é sempre igual à velocidade da luz no vácuo  $c$  e o limite superior para a velocidade do sinal. No entanto, a definição de Sommerfeld de um sinal “*um movimento de onda limitado: nada até um determinado momento no tempo, então, por exemplo, uma série de ondas senoidais regulares que param depois de certo tempo ou que continuam indefinidamente*”, deixa espaço para uma abordagem mais moderna para o problema, evitando o caráter não físico das descontinuidades. Segundo esta definição, um sinal envolve uma nova informação ou um elemento de “surpresa” que não poderia ter sido previsto a partir do movimento da onda em um tempo anterior.

Uma abordagem interessante foi proposta por Chiao e colaboradores. Eles fizeram uma generalização da definição de Sommerfeld e afirmaram que todas as informações em um pulso são codificadas em pontos de não analiticidade [17, 18]. Na verdade, a idéia de que a informação pode ser associada à pontos não analíticos estava implícita na definição de sinal por Sommerfeld. Estes pontos não analíticos são especiais, porque o comportamento de uma onda antes de tal ponto não pode ser usado para prever o comportamento após o ponto não analítico.

Na verdade, o valor da velocidade da informação transmitida através de um meio com dispersão anômala, onde a velocidade de propagação do pulso é superluminal, não tem sido determinada, experimentalmente, de maneira clara e direta. A falta de uma forma adequada para representar a informação tem levado alguns pesquisadores a realizarem investigações empregando pulsos idealizados com descontinuidades abruptas. Um experimento recente, utilizando esta idealização de pulsos com descontinuidades, demonstrou



que o tempo necessário para detectar a informação é maior para a propagação através de meios superluminais do que no vácuo [7]. Este resultado sugere que mesmo para a propagação superluminal, a velocidade da informação, como esperado, é menor do que  $c$ , mas o desvio padrão associado à medida é muito grande. Eles tentaram associar informações a descontinuidades abruptas em pulsos e o experimento não pode fornecer uma medida precisa da velocidade da informação [8].

## 1.8 Velocidade de grupo versus tempo de grupo

Nesta seção veremos por que o tempo de grupo de um pulso, em sistemas compactos ou com velocidade de grupo negativa, é uma medida mais interessante do que a velocidade de grupo deste pulso

Enquanto as velocidades de grupo negativas são fisicamente significativas e matematicamente consistentes, elas também são um pouco complicadas de discutir. Por exemplo, por que um pulso com  $v_g = -0,01c$  é mais rápido que um pulso com  $v_g = 10^{10}c$ ? A resposta curta é que o pico do pulso transmitido através do meio sai antes do pico do pulso incidente entrar no meio, conforme demonstrado na Figura 1.5. Para quantificar esse tempo de saída, vamos definir o tempo de grupo  $t_g$  como a quantidade de tempo que o pico de um pulso é avançado ou atrasado em relação ao pico de um pulso idêntico viajando através do vácuo. Estas quantidades são relacionadas por

$$t_g = \frac{L}{v_g} - \frac{L}{c} \quad (1.169)$$

Existem muitas razões pelas quais o tempo de grupo é, freqüentemente, uma medida mais útil da rapidez de um pulso. Conforme demonstrado na Figura 1.4, para  $n_0 = 1$  a velocidade de grupo diverge, no limite quando  $\omega dn/dn \rightarrow -1$ , indo para  $+\infty$  quando nos aproximamos pela direita, e para  $-\infty$  quando nos aproximamos pela esquerda. Entretanto, o tempo de grupo varia suavemente quando o pulso vai desde muito lento ( $v_g$

positiva e pequena) até muito rápida ( $v_g$  negativa). Isto é demonstrado claramente se nós considerarmos a  $v_g$  e o  $t_g$  como função de  $\omega dn/d\omega$ , como demonstrado na Figura 1.6.

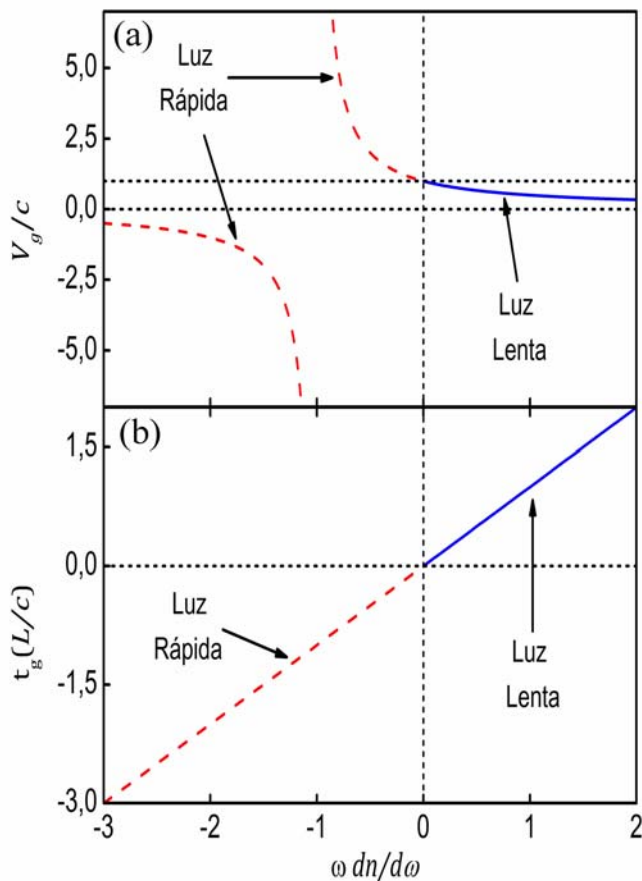


Figura 1.6: (a)  $v_g$  como uma função de  $\omega dn/d\omega$  e (b)  $t_g$  como uma função de  $\omega dn/d\omega$ . Em ambos os casos, a linha tracejada em vermelho representa luz rápida e a linha sólida em azul representa luz lenta. Para esses gráficos,  $n_0 = 1$ .

Outra importante razão para o uso do tempo de grupo, a qual discutiremos de maneira clara no próximo capítulo, dá-se quando o pulso se propaga em sistemas compactos, tais como os circuitos eletrônicos. O sistema compacto é um sistema cujo tamanho  $L$  é muito menor do que o comprimento de onda  $2\pi/k$  de interesse. Nestes sistemas não podemos definir a velocidade de grupo de um pulso propagando através dos mesmos, pois não existe escala de comprimento finito. Em vez disso, podemos definir o tempo de grupo ou, como trataremos no próximo capítulo, o *atraso de grupo*.

## 1.9 Não violação da causalidade de Einstein

Mesmo após, mais de um século desde que Brillouin salientou, de acordo com as leis de dispersão, que na região de dispersão anômala dentro de uma linha de absorção a velocidade de grupo, na qual o envelope do pulso viaja, poderia ser superluminal, ou seja, maior do que a velocidade da luz no vácuo  $c$ , sem estar violando a relatividade especial, muitos equívocos têm atormentado essa questão. Isso pode ser devido, em parte, ao fato de que o trabalho de Brillouin [2] envolve uma série de detalhes técnicos e notações, que difere consideravelmente do que é convencionalmente utilizado atualmente. Além disso, Sommerfeld e Brillouin não puderam citar nenhuma literatura experimental relevante, a respeito dessas velocidades de grupo anormal. Sua motivação central, de acordo com Sommerfeld, se dá ao fato de que *‘essa aparente contradição da teoria da relatividade deveria ser resolvida’*.

Em muitos casos, dependendo dos valores assumidos para parâmetros como a largura do pulso e da linha de absorção, o pulso é fortemente distorcido ao se propagar em um meio dispersivo. Por este e por outros motivos, tem-se afirmado que, o conceito de velocidade de grupo perde o significado quando  $v_g$  é maior que  $c$  ou negativa [9, 10].

Garret e McCumber [3] observaram, teoricamente, que um pulso gaussiano *‘não tem um verdadeiro início ou fim’*. Em  $t < 0$ , o pico do pulso transmitido através de um sistema anormalmente dispersivo visto em  $z > 0$ , por um observador, não é um reflexo direto do pico do pulso incidente, mas resulta da ação do meio dispersivo sobre as primeiras componentes da borda desse pulso. As previsões de Garret e McCumber foram demonstradas experimentalmente, pela primeira vez, por Chu e Wong em 1981 [4]. Esse e outros experimentos demonstraram, de fato, que um pulso pode se propagar com velocidade de grupo superluminal e sem distorção significativa.

Para explicar porque essa velocidade de grupo superluminal não viola o princípio da

Causalidade de Einstein, é interessante apresentar a velocidade de grupo aproximada, de uma forma diferente. Imagine uma onda, dada pela equação (1.26) se propagando na direção  $z$

$$E(z, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) e^{ik(\omega)z - i\omega t} d\omega \quad (1.170)$$

onde a amplitude  $A(\omega)$  é dada pela equação (1.27)

$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} E(0, t') e^{i\omega t'} dt' \quad (1.171)$$

assim

$$E(z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E(0, t') e^{i\omega t'} dt' \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(\omega)z - i\omega t} d\omega. \quad (1.172)$$

Suponha que  $E(0, t') = A(t') e^{-i\omega_0 t'}$ , então

$$E(z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(t') e^{-i\omega_0 t'} e^{i\omega t'} dt' \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(\omega)z - i\omega t} d\omega. \quad (1.173)$$

onde  $A(t')$  varia lentamente em escalas de tempo proporcionais a  $1/\omega_0$  de maneira que podemos substituir

$$k(\omega) = k_0 + (\omega - \omega_0) \left. \frac{dk}{d\omega} \right|_0 = k_0 + \frac{(\omega - \omega_0)}{v_g}. \quad (1.174)$$

Então, essa aproximação fica

$$E(z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(t') e^{-i\omega_0 t'} e^{i\omega t'} dt' \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\left(k_0 + \frac{(\omega - \omega_0)}{v_g}\right)z - i\omega t} d\omega$$

$$E(z, t) = \frac{1}{2\pi} e^{-i(\omega_0 t - k_0 z)} \int_{-\infty}^{\infty} A(t') dt' \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\omega - \omega_0)(t - t')} e^{(\omega - \omega_0)z/v_g} d\omega \quad (1.175)$$

$$E(z, t) = e^{-i(\omega_0 t - k_0 z)} A(t - z/v_g) \quad (1.176)$$

que, obviamente, é equivalente a equação (1.38). Vamos expressar agora a integral em

(1.175) sobre  $\omega'$  e  $t'$  como

$$\begin{aligned}
 I &= \int_{-\infty}^{\infty} A(t') dt' \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\omega-\omega_0)(t-t')} e^{(\omega-\omega_0)z/v_g} d\omega \\
 I &= \int_{-\infty}^{\infty} A(t') dt' \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^n}{n!} (v_g^{-1} - c^{-1})^n \int_{-\infty}^{\infty} (\omega - \omega_0)^n e^{-i(\omega-\omega_0)(t-t'-z/c)} d\omega \\
 I &= \int_{-\infty}^{\infty} A(t') dt' \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} (v_g^{-1} - c^{-1})^n \frac{\partial^n}{\partial t'^n} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\omega-\omega_0)(t'-t+z/c)} d\omega \\
 I &= 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} (v_g^{-1} - c^{-1})^n \frac{\partial^n}{\partial t'^n} \delta(t' - t + z/c) \\
 I &= 2\pi e^{(c^{-1}-v_g^{-1})z\partial/\partial t} A(t - z/c)
 \end{aligned}$$

de modo que

$$E(z, t) = e^{-i(\omega_0 t - k_0 z)} e^{[c^{-1} - v_g^{-1}]z\partial/\partial t} A(t - z/c) \quad (1.177a)$$

ou

$$E(z, t) = e^{-i(\omega_0 t - k_0 z)} A(t - z/v_g) \quad (1.177b)$$

que é equivalente ao resultado obtido por Diener [19].

O operador translação  $(\exp [c^{-1} - v_g^{-1}] z\partial/\partial t)$  pode ser entendido como uma série de Taylor e para velocidades de grupo superluminal  $v_g > c$ , fornece uma continuidade analítica do pulso sobre um intervalo de tempo positivo  $(c^{-1} - v_g^{-1})L > 0$ . Ou seja, a equação (1.177b) indica que na velocidade de grupo aproximada, na qual a segunda derivada e as derivadas de ordens mais altas do índice de refração em relação à frequência são negligenciadas, a propagação ao longo de uma distância  $z$  corresponde a uma continuidade analítica ao longo do tempo  $z/c - z/v_g$  da propagação no vácuo do envelope de pulso  $A(t - z/c)$ . Em outras palavras, podemos dizer que essa velocidade de grupo superluminal não implica uma propagação superluminal de uma nova informação, uma vez que não há nenhuma informação em  $A(t - z/v_g)$  que não estivesse contida em  $A(t - z/c)$ .

Evidentemente, uma nova informação é propagada somente se  $A(t - z/c)$  não tiver uma continuidade analítica. Neste caso, a equação (1.177b) é inválida, enquanto a equação

(1.177a) é válida até o momento em que  $A(t - z/c)$  tiver um ponto de não analiticidade. Depois disso, a evolução do pulso se torna muito mais complicada do que uma simples propagação sem distorção na velocidade de grupo superluminal. O ponto de singularidade se comporta como um “front” de Sommerfeld-Brillouin, que se propaga em  $c$ . Ou seja, uma verdadeira informação, evidentemente, exige não-analiticidade e nenhuma informação pode ser transmitida numa velocidade maior que a da luz no vácuo  $c$ .

O caso de um pulso analítico (por exemplo: Pulso Gaussiano) propagando sem distorção a uma velocidade de grupo superluminal é, todavia, notável quando se considera que (1) os pontos no tempo  $t$  em um pulso transmitido são causalmente determinados pelos pontos em  $t < z/c$  no pulso incidente e ainda (2) o pulso transmitido avança com velocidade de grupo  $v_g > c$ .

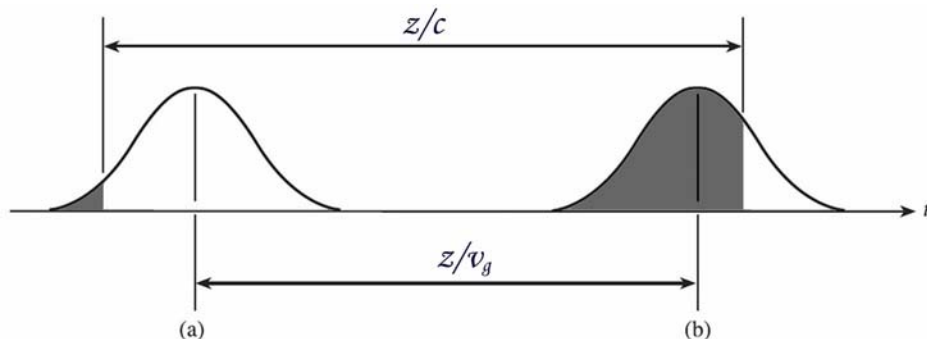


Figura 1.7: (a) Pulso incidente e (b) pulso transmitido para um comprimento  $L$  de propagação e velocidade de grupo  $v_g > c$ . A parte sombreada de (b) é completamente determinada pela parte sombreada de (a).

Isso significa, tal como indicado na Figura 1.7, que se  $(z/c - z/v_g)$  é muito maior que a duração do pulso, o pico do pulso transmitido é inteiramente reconstruído a partir de uma pequena cauda do pulso incidente: se  $(z/c - z/v_g)$  é grande o suficiente, quase todo o pulso transmitido é reconstruído pela continuidade analítica de uma porção muito pequena do pulso incidente.

Note que o pico do pulso transmitido não é causalmente conectado ao pico do pulso

incidente, de modo que, em particular, a observação de que o pico do pulso se move superluminalmente não contradiz a causalidade de Einstein. Em suma, podemos concluir que, um pulso descrito por uma função analítica do tempo não pode transmitir informação, uma vez que a informação está relacionada com as mudanças imprevisíveis na transmissão do pulso. De fato, como as funções analíticas podem ser expandidas em série de Taylor, se qualquer pequena parte do pulso é detectada, o pulso inteiro pode ser reconstruído.

## 1.10 Definição de ponto não analítico

Definiremos agora o que é um ponto não analítico. Este conceito é de central importância em nosso trabalho, pois temos como objetivo associar a informação a um ponto não analítico em uma função com suporte compacto suave, que apresentaremos na próxima seção.

Se a expansão de Taylor

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-x_0)^n}{n!} \left[ \frac{d^n f(x)}{dx^n} \right]_{x=x_0}, \quad (1.178)$$

de uma certa função em um determinado ponto convergir e for única, dizemos que este é um *ponto analítico* [20]. Para uma função com continuidade analítica, a partir de qualquer ponto da função e uma região infinitesimal ao redor do mesmo, podemos obter todos os valores da função nos outros pontos. Uma ilustração deste tipo de função pode ser vista na Figura 1.8.

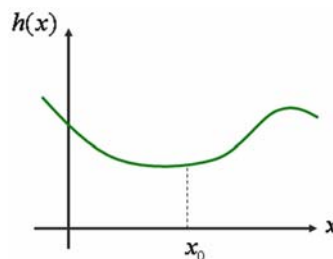


Figura 1.8: Esquema de uma função analítica [21].

A partir de  $x_0$  podemos encontrar toda a distribuição restante da função. Assim, podemos dizer que não existe nenhuma informação que não esteja contida na série de Taylor. E além disso, poderíamos ter escolhido qualquer outro ponto que não  $x_0$ , para aplicarmos a expansão de Taylor e calcularmos o restante da distribuição da função, em outras palavras, qualquer ponto contém toda a informação da função.

Por outro lado, se em algum ponto não houver unicidade ou convergência da série de Taylor, chamamos este ponto de um *ponto não analítico*. Um esquema de dois tipos de funções com pontos não analíticos pode ser visto na Figura 1.9.

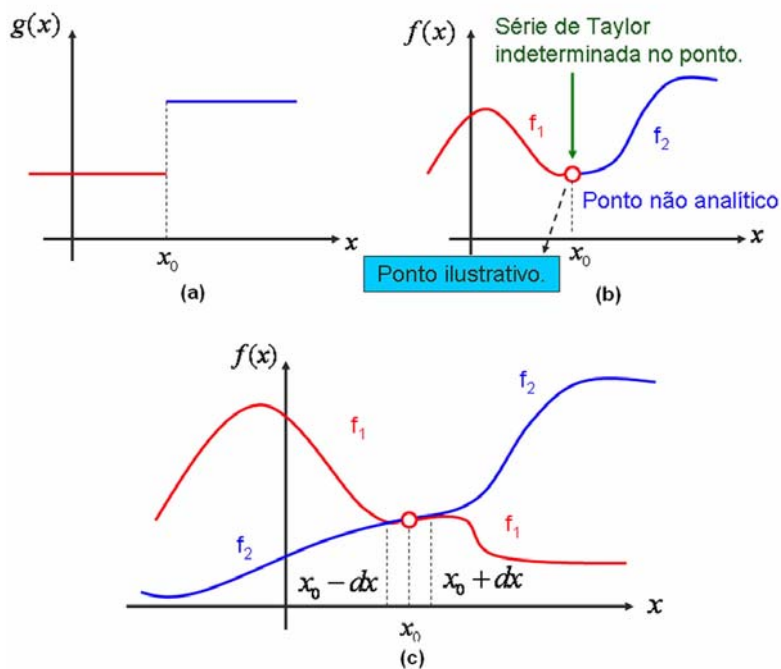


Figura 1.9: Esquema ilustrativo de duas funções com pontos não analíticos [21].

Na Figura 1.9 tanto a função  $g(x)$  como a função  $f(x)$  possuem pontos não analíticos em  $x_0$ . Na Figura 1.9a temos uma função descontínua, em contraste, colocamos uma função contínua em 1.9b que também possui um ponto não analítico. Usamos na ilustração, cores diferentes para reforçar este fato.

Analisemos agora a Figura 1.9c, que é uma extensão da Figura 1.9b. Vemos que a



partir do ponto  $x_0$  podemos fazer duas escolhas, podemos usar a expansão de Taylor para calcular o valor da função  $f_1$  no ponto  $x_0 + dx$ , ou encontrar o valor da função  $f_2$  neste mesmo ponto. Analogamente, a partir de  $x_0$  podemos encontrar o valor correspondente a função  $f_2$  para o ponto  $x_0 - dx$  ou o valor correspondente a  $f_1$ . Ou seja, a partir de  $x_0$  temos dois valores possíveis para a expressão de Taylor, tanto à direita como à esquerda deste ponto. Deste modo, como o valor da expansão não é unicamente determinada, temos que este ponto é um ponto não analítico. A mesma análise vale para o outro exemplo na Figura 1.9.

## 1.11 Função com suporte compacto suave

Nesta seção estudaremos as características de uma função com suporte compacto suave. Este tipo de função é de central importância em nosso trabalho, pois temos como objetivo associar a informação, codificada em um pulso eletromagnético ou elétrico, a um ponto não analítico em uma função com suporte compacto suave.

O suporte de uma função é o conjunto de pontos onde a função é diferente de zero, Este conceito é amplamente utilizado em análises matemáticas, sob a forma de funções com o suporte que é limitado. Desta forma, uma função com suporte compacto é a que tem valores diferentes de zero para um subconjunto limitado de seus argumentos. Esta classe de funções foram descobertas apenas no final da década de 1940, por Laurent Schwartz [22] em sua teoria das funções generalizadas, estendendo o trabalho feito por Sobolev [23] em 1930. Mais recentemente, essas funções foram amplamente utilizadas por Daubechies [24] para construção de uma classe de ondas que são identicamente nula fora de um intervalo finito.

Certas funções com suporte compacto podem apresentar pontos não analíticos contínuos, ou seja, são funções suaves. Onde por suave, entendemos que todas as derivadas da função existem e são contínuas. As funções suaves (também chamadas de funções infini-

tamente deriváveis) e as funções analíticas são dois tipos muito importantes de funções. Podemos provar, facilmente, que qualquer função analítica de valores reais é suave, porém, o contrário não é verdadeiro. De fato, se pudermos definir mais de uma série de Taylor convergindo para um ponto em uma função, este ponto é não analítico. Este é o caso para as funções com *Suporte Compacto Suave*, a qual neste trabalho trataremos abreviadamente como *SCS*.

Em nosso estudo, utilizamos um pulso com *SCS* com a seguinte descrição matemática

$$f(t) = \begin{cases} \exp\left(\frac{-A}{B-Ct^2}\right) & \text{para } |t| < \sqrt{B/C} \\ 0 & \text{para } |t| \geq \sqrt{B/C} \end{cases}, \quad (1.179)$$

onde  $A$ ,  $B$  e  $C$  são constantes reais. Na Figura 1.10 apresentamos um desenho para esse pulso específico, onde os grandes pontos brancos representam os pontos não analíticos.

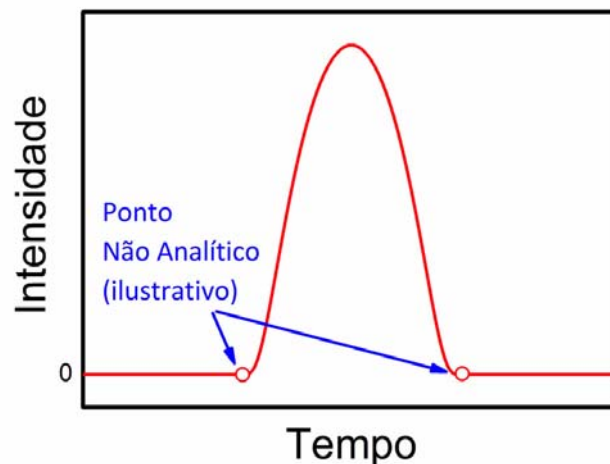


Figura 1.10: Esquema do pulso com suporte compacto.

Note que o pulso com *SCS* tem as características físicas e matemáticas do sinal, definido por Sommerfeld<sup>1</sup>, que citamos anteriormente.

<sup>1</sup>Um movimento de onda limitado: nada até um determinado momento no tempo, então, por exemplo, uma série de ondas senoidais regulares que param depois de certo tempo ou que continuam indefinidamente.

A função  $f(t)$  possui derivadas contínuas de todas as ordens em todos os instantes  $t$  do tempo, dadas por

$$f^{(n)}(t) = \begin{cases} p_n(t) \frac{(A/C)^{2n}}{(t^2 - B/C)^{2n}} f(t) & \text{para } |t| < \sqrt{B/C} \\ 0 & \text{para } |t| \geq \sqrt{B/C} \end{cases}, \quad (1.180)$$

onde  $p_n(t)$  é um polinômio de grau  $n$  dado recursivamente por  $p_1(t) = -2Ct/A$  e

$$p_{n+1}(t) = p'_n(t) (t^2 - B/C)^2 - (4nt(t^2 - B/C) - p_n(t)) p_n(t), \quad n \in \mathbb{N}.$$

A prova está baseada no fato que para qualquer número natural  $m$ , incluindo zero,

$$\lim_{|t| \rightarrow \sqrt{B/C}} \left[ \frac{(A/C)^m}{(t^2 - B/C)^m} \exp\left(\frac{-A}{B - Ct^2}\right) \right] = 0. \quad (1.181)$$

A validade desta última equação pode se verificada a partir da representação em séries de potência da função exponencial. Nesta representação temos para todos os números naturais  $m$  (incluindo zero)

$$\begin{aligned} \frac{(A/C)^m}{(t^2 - B/C)^m} &= \frac{(t^2 - B/C)}{(A/C)} \left( \frac{A/C}{t^2 - B/C} \right)^{m+1} \\ \frac{(A/C)^m}{(t^2 - B/C)^m} &\leq (m+1)! \frac{(t^2 - B/C)}{(A/C)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left( \frac{A/C}{t^2 - B/C} \right)^n, \end{aligned} \quad (1.182)$$

uma vez que todos os termos positivos, para  $n \neq m+1$ , são somados

$$\frac{(A/C)^m}{(t^2 - B/C)^m} \leq (m+1)! \frac{(B - Ct^2)}{A} \exp\left(\frac{A}{B - Ct^2}\right), \quad |t| < \sqrt{B/C}.$$

Portanto, usando a equação funcional da função exponencial,

$$\lim_{|t| \rightarrow \sqrt{B/C}} \left[ \frac{(A/C)^m}{(t^2 - B/C)^m} \exp\left(\frac{-A}{B - Ct^2}\right) \right] \leq (m+1)! \lim_{|t| \rightarrow \sqrt{B/C}} \left[ \frac{(B - Ct^2)}{A} \right] \quad (1.183)$$

assim,

$$\lim_{|t| \rightarrow \sqrt{B/C}} \left[ \frac{(A/C)^m}{(t^2 - B/C)^m} \exp\left(\frac{-A}{B - Ct^2}\right) \right] = 0. \quad (1.184)$$

Isto implica que todas as  $f^{(n)}(t)$  são contínuas e deriváveis em  $|t| = \sqrt{B/C}$ , porque

$$\lim_{|t| \rightarrow \sqrt{B/C}} \left[ \frac{f^{(n)}(|t|) - f^{(n)}(\sqrt{B/C})}{|t| - \sqrt{B/C}} \right] = \lim_{|t| \rightarrow \sqrt{B/C}} \left[ \frac{f^{(n)}(t)}{|t| - \sqrt{B/C}} \right]$$

$$= \frac{2B}{A} \lim_{|t| \rightarrow \sqrt{B/C}} \left[ p_n(t) \frac{(A/C)^{2n+1}}{(t^2 - B/C)^{2n+1}} \exp\left(\frac{-A}{B - Ct^2}\right) \right] \quad (1.185)$$

então

$$\lim_{|t| \rightarrow \sqrt{B/C}} \left[ \frac{f^{(n)}(|t|) - f^{(n)}(\sqrt{B/C})}{|t| - \sqrt{B/C}} \right] = 0. \quad (1.186)$$

Desta forma, provamos que a função  $f(t)$  é suave e todas as suas derivadas em são iguais a 0 (zero) em  $|t| = \sqrt{B/C}$ . Portanto, a série de Taylor de  $f(t)$  em  $|t| = \sqrt{B/C}$  converge para zero, da mesma forma que a função nula,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(\sqrt{B/C})}{n!} (|t| - \sqrt{B/C})^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{0}{n!} (|t| - \sqrt{B/C})^n = 0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Entretanto, para  $|t| > \sqrt{B/C}$  a série de Taylor não é igual a  $f(t)$  e, conseqüentemente,  $f(t)$  é não analítica em  $|t| = \sqrt{B/C}$ .

## 1.12 Conclusão

Neste capítulo, estudamos as condições necessárias, em um sistema, para obtermos velocidades de grupo maiores que a velocidade da luz no vácuo. Vimos que, podemos ter velocidades superluminais quando o pulso se propaga em regiões com dispersão anômala, e embora o pico se propague com velocidades de grupo superluminais, isto não viola a causalidade.

Estudamos também algumas das velocidades características da luz e por fim, estudamos as características de uma função com suporte compacto suave contendo pontos não analíticos de intensidade zero, infinitamente deriváveis.

## Capítulo 2

# Circuito de Atraso de Grupo Negativo e a Superluminalidade

### 2.1 Introdução

Neste capítulo, estudaremos as configurações necessárias na construção um circuito eletrônico com analogias a um sistema atômico. Como exemplo, demonstraremos que um circuito eletrônico amplificador simples ajustado para apresentar atrasos de grupo negativo é um análogo eletrônico do modelo de Lorentz. Quando inseridos periodicamente em cascata numa linha de transmissão, tais circuitos se comportam como um meio que apresenta superluminalidade. Para isto, iniciaremos com uma rápida revisão sobre circuitos, bem como, a respeito de amplificadores operacionais e suas principais características de operação, tais como as "*Regras de ouro*" e a realimentação negativa. Em seguida, abordaremos o conceito de atraso de grupo negativo e os princípios gerais para geração de atraso de grupo negativo em um circuito eletrônico. Por fim veremos que a propagação superluminal de pulso elétricos nestes circuitos eletrônicos análogos a sistemas atômicos, modelados classicamente como um dielétrico de Lorentz, não viola o princípio da causalidade, em concordância com a discussão do capítulo anterior.

## 2.2 Revisão sobre circuitos

Nesta seção apresentaremos os componentes, conceitos e definições fundamentais que utilizaremos na análise dos circuitos eletrônicos utilizados em nosso estudo [25–27].

Um circuito elétrico pode ser definido como uma interligação de componentes básicos formando pelo menos um caminho fechado. Em um circuito existem duas grandezas físicas fundamentais: a tensão e a corrente. A tensão (ou diferença de potencial) entre dois pontos é a medida do trabalho necessário para transferir carga unitária de um ponto à outro. A diferença de potencial entre dois pontos perfazendo uma tensão de  $1V$  (Volts) corresponde a um trabalho de  $1J$  (Joule) necessário para transferir uma carga de  $1C$  (Coulomb). A corrente é a transferência (fluxo) de carga. Uma corrente de  $1A$  (Ampère) equivale à transferência de carga de  $1C/s$  (Coulomb por segundo).

O circuito eletrônico é um tipo de circuito elétrico que, além de componentes elétricos, utiliza certos tipos de componentes eletrônicos, como transistores ou amplificadores operacionais, que produzem transformações nas grandezas elétricas. Neste trabalho utilizaremos circuitos eletrônicos que apresentam comportamento superluminal, a fim de estudar a velocidade da informação associada a pontos não analíticos em pulsos com suporte compacto se propagando nestes meios. Estes circuitos são constituídos dos seguintes componentes: resistores, capacitores, indutores e amplificadores operacionais.

O resistor é caracterizado por sua resistência elétrica, a qual para o caso linear só depende das características do material empregado (resistividade) e das suas dimensões geométricas. A resistência expressa o grau de oposição à passagem de cargas elétricas que o componente apresenta. No resistor linear, a tensão ( $V$ ) e a corrente ( $I$ ) nos seus terminais estão relacionadas pela Lei de Ohm

$$V(t) = RI(t). \quad (2.1)$$

O capacitor possui como característica básica a capacidade de armazenar cargas elétri-

cas e energia no seu campo elétrico. A grandeza que caracteriza o capacitor é sua capacitância, definida como a quantidade de cargas elétricas armazenadas por unidade de tensão aplicada. A tensão ( $V$ ) e a corrente ( $I$ ) nos terminais de um capacitor estão relacionadas como

$$V(t) = \frac{1}{C} \int I(t) dt. \quad (2.2)$$

O indutor é um dispositivo que possui um campo magnético capaz de armazenar energia. O campo magnético do indutor é criado pela corrente elétrica que percorre o indutor. A grandeza que caracteriza o indutor é a indutância e sua relação entre a tensão ( $V$ ) e corrente ( $I$ ) é dada como

$$V(t) = L \frac{dI(t)}{dt}. \quad (2.3)$$

Os amplificadores operacionais são dispositivos versáteis com uma imensa gama de aplicações em toda a eletrônica. Em geral, os amplificadores operacionais são amplificadores de acoplamento direto, de alto ganho, que usam realimentação para controle de suas características. Além disso, ele é um componente eletrônico compacto construído da junção de resistores, capacitores e transistores.

Antes de apresentarmos as configurações dos circuitos eletrônicos utilizados em nosso estudo e as analogias aos sistemas atômicos, discutiremos algumas características de funcionamento dos amplificadores operacionais necessárias para a nossa análise do comportamento superluminal destes meios.

## 2.3 Amplificador operacional, realimentação e as "Regras de Ouro"

Nesta seção, estudaremos algumas das características e os modos de operação dos amplificadores operacionais, tais como a realimentação, as "Regras de ouro" e os tipos de montagens de circuitos com amplificadores operacionais.

### 2.3.1 Amplificador operacional e a realimentação

Neste contexto, o amplificador operacional, que de agora em diante trataremos abreviadamente como *AmpOp*, será considerado como uma caixa preta. Estamos interessados em compreender o seu funcionamento sem estudar seus componentes. O AmpOp é um circuito amplificador de tensão contínua de altíssimo ganho máximo, dotado de duas entradas diferenciais e uma saída, na qual se encontra o resultado da amplificação.

O símbolo do AmpOp e seus principais terminais são apresentados na Figura 2.1.

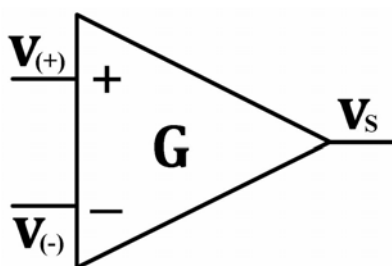


Figura 2.1: Símbolo do amplificador operacional.

Uma das portas de entrada é *inversora* ( $-$ ), onde o sinal ‘ $-$ ’ indica uma mudança de fase de  $180^\circ$  no pulso da saída, em relação ao pulso de entrada nesta porta, a outra porta de entrada é *não-inversora* ( $+$ ), onde o sinal ‘ $+$ ’ indica uma mudança de fase nula. A tensão na saída (vértice do triângulo),  $V_s$ , é igual à um ganho  $G$  multiplicado pela diferença entre as tensões nas entradas inversora e não-inversora,

$$V_s = G (V_{(+)} - V_{(-)}) . \quad (2.4)$$

Idealmente, o ganho  $G$  seria infinito, na prática é da ordem de  $10^5$ .

Existem três modos de operação em um AmpOp, sendo eles: sem realimentação, com realimentação positiva e com realimentação negativa.



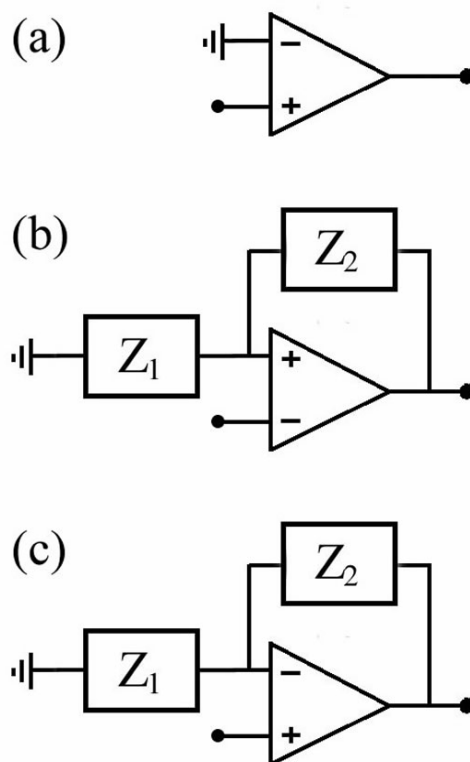


Figura 2.2: Modo de operação (a) sem realimentação, (b) com realimentação positiva e (c) com realimentação negativa.

O modo de operação sem realimentação, mostrado na Figura 2.2.a, é conhecido como operação em malha aberta, por utilizar o ganho do AmpOp estipulado pelo fabricante, ou seja, não se tem o controle do mesmo.

O modo de operação com realimentação positiva, mostrado na Figura 2.2.b, consiste em reaplicar o sinal de saída novamente a entrada não-inversora, de alguma maneira. Este modelo de operação é denominado de operação em malha fechada, pois o ganho do AmpOp, para o caso mostrado na Figura 2.2.b é determinado por  $Z_1$  e  $Z_2$  e pode ser controlado pelo projetista. Onde  $Z_1$  e  $Z_2$  representam as impedâncias complexas de filtros lineares passivos compostos, por exemplo, de resistores e capacitores. Este modo de operação apresenta como desvantagem uma instabilidade ao circuito e o AmpOp não trabalha como amplificador de sinais, pois sua resposta não é linear.

O modo mais importante e mais utilizado em circuitos com AmpOps é o de realimentação negativa, sendo este o modo de operação utilizado na construção dos circuitos eletrônicos apresentados neste trabalho. O modo de operação com realimentação negativa, mostrado na Figura 2.2.c, consiste em reaplicar, de alguma maneira, o sinal de saída novamente a entrada inversora do AmpOp. Este modo de operação, como na realimentação positiva, tem características de malha fechada, ou seja, o ganho do AmpOp mostrado na Figura 2.2.c é determinado por  $Z_1$  e  $Z_2$  e pode ser controlado pelo projetista.

### 2.3.2 Regras de ouro na operação de um amplificador operacional

O AmpOp ideal constitui um modelo simplificado de um amplo conjunto de amplificadores de tensão atualmente existentes. Estes amplificadores possuem várias propriedades em seu funcionamento, entre as quais destacamos as três propriedades seguintes:

- i)* impedância de entrada infinita;
- ii)* impedância de saída nula;
- iii)* ganho de tensão infinito.

A principal consequência desse conjunto de propriedades enunciadas é, na prática, a possibilidade de estabelecer "*Regras de Ouro*" que permitem a operação correta de um AmpOp. Horowitz [27] explica que sob operação normal com realimentação, o AmpOp seguirá estas duas regras:

1. *O valor da tensão na saída (fornecido pelo AmpOp), será o necessário para que a diferença de voltagem entre as entradas seja igual a zero.*
2. *As estradas não consomem correntes.*

Para melhor explicar estes conceitos assumiremos que o ganho do AmpOp seja infinito. Então, sabendo que a relação ideal

$$V_s = G (V_{(+)} - V_{(-)})$$

é sempre válida, podemos afirmar que:

$$V_{(+)} - V_{(-)} = \frac{V_s}{G} \approx 0, \quad (2.5)$$

pois  $V_s$  é finita e  $G = \infty$ . Estamos utilizando o sinal de “aproximadamente igual” ao invés de “igual” a zero na expressão (2.5), para lembrar que estamos na realidade empregando um artifício matemático (formalmente, devemos dizer que  $G$  tende ao infinito, mas não o é – na prática,  $G$  situa-se tipicamente entre  $10^5$  e  $10^7$ ). Desta forma podemos notar que teremos uma tensão de entrada  $V_{(-)}$  igual (tendendo) ao valor de tensão de saída  $V_{(+)}$ .

Esta técnica nos permite dizer que quanto maior for  $G$ , mais o valor de entrada  $V_{(+)}$  se aproxima do valor de entrada  $V_{(-)}$  para valores finitos de  $V_s$ . Em outras palavras, ela nos chama a atenção para as tensões das entradas do AmpOp pois é como se as entradas inversora e não-inversora estivessem sido curto circuitadas. Sabemos também que não existe corrente por onde tem um curto momentâneo.

### **2.3.3 Amplificador operacional como amplificador inversor e não inversor**

O AmpOp, em um circuito eletrônico com realimentação negativa, é geralmente utilizado em duas configurações básicas: a montagem *inversora* ou a *não-inversora*. Esta última é de fundamental importância para o entendimento dos conceitos apresentados nas próximas seções, uma vez que os circuitos eletrônicos nelas discutidos utilizam esta configuração.

O circuito mostrado na Figura 2.3.a é chamado de amplificador **inversor**, pois a tensão de saída ( $V_s$ ) será defasada de  $180^\circ$  em relação à entrada ( $V_e$ ). Nesta configuração, quando a entrada for positiva a saída será forçosamente negativa para conseguir aproximar as tensões das entradas.

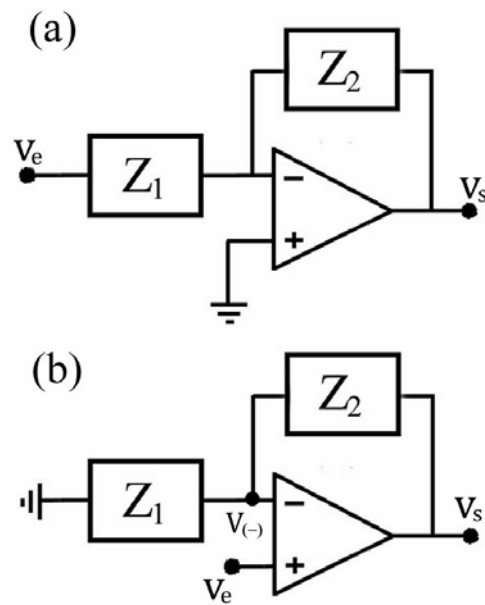


Figura 2.3: (a) Amplificador inversor e (b) amplificador não-inversor.

De acordo com as leis de Kirchoff e a lei Ohm, a tensão de saída desta configuração é dada por

$$V_s = -V_e \frac{Z_1}{Z_2}. \quad (2.6)$$

Uma vez que a tensão de saída está relacionada à tensão de entrada através de uma função de transferência  $T$ , de maneira que

$$V_s = T V_e \quad (2.7)$$

a equação (2.6) conduz a uma função de transferência

$$T = -\frac{Z_1}{Z_2}. \quad (2.8)$$

O circuito mostrado na Figura 2.3.b é chamado de amplificador **não-inversor**, como o nome mesmo diz, é um amplificador no qual a tensão de entrada ( $V_e$ ) é aplicada à entrada não-inversora, o que significa que a tensão de saída ( $V_s$ ) tem a mesma polaridade

da tensão de entrada, não há inversão de fase entre o pulso de entrada e o pulso de saída. Observe que a tensão de saída alimenta um divisor de tensão formado por  $Z_1$  e  $Z_2$  e que a tensão em  $Z_1$ , que é uma fração da tensão de saída, é aplicada à entrada inversora. A tensão de entrada inversora é então igual a

$$V_{(-)} = V_s \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2}. \quad (2.9)$$

Adotando o fato que a tensão de saída deve assumir um valor que leve à entrada inversora o valor de tensão que aplicado a equação

$$V_s = G (V_e - V_{(-)})$$

mantenha a saída estabilizada. Então,

$$V_s = G \left( V_e - V_s \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} \right) \quad (2.10)$$

ou

$$\frac{V_s}{V_e} = \frac{G}{1 + G \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2}}. \quad (2.11)$$

No limite quando o ganho  $G$  do AmpOp tende ao infinito a função de transferência total deste circuito é aproximada como

$$T = 1 + \frac{Z_2}{Z_1}. \quad (2.12)$$

## 2.4 Atraso de grupo

Nesta seção apresentaremos o conceito de atraso de grupo do envelope de um pulso se propagando em um sistema compacto. O conceito de atraso de grupo negativo em sistemas compactos como um circuito eletrônico é muito útil para compreender vários aspectos da velocidade de grupo superluminal. O sistema compacto é um sistema cujo tamanho  $L$  é muito menor do que o comprimento de onda  $2\pi/k$  de interesse.

Sabemos que a velocidade de grupo  $v_g$  em um meio dispersivo é definida como

$$v_g^{-1} = \left. \frac{dk}{d\omega} \right|_{\omega_0} \quad (2.13)$$

onde o número de ondas  $k(\omega)$  é uma função da frequência  $\omega$ . A equação acima corresponde à velocidade de propagação do envelope de um pulso cujo espectro é limitado dentro de um intervalo curto contendo  $\omega_0$ .

Em sistemas como os circuitos eletrônicos, não podemos definir a velocidade de grupo de um pulso se propagando através dos mesmos, porque não existe escala de comprimento finito. Em vez disso, podemos definir o *atraso de grupo*. O atraso de grupo é a diferença de tempo entre os picos dos envelopes dos pulsos de entrada e de saída do circuito. Se o atraso for negativo, o pico do pulso de saída precede o pico do pulso de entrada, como mostrado na Figura 2.4.

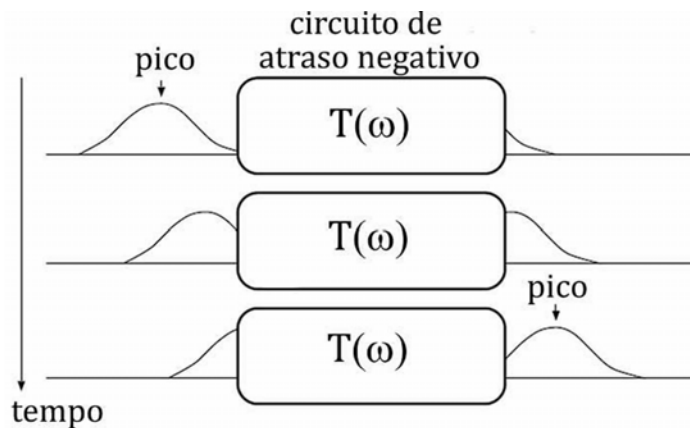


Figura 2.4: Circuito eletrônico (caixa preta) para atrasos negativos.

Os atrasos negativos em circuitos eletrônicos estão intimamente ligados às velocidades de grupo negativas ou superluminais, em sistemas espacialmente ampliados.

Similarmente à velocidade de grupo, o atraso de grupo é definido como

$$t_g = - \left. \frac{d\phi}{d\omega} \right|_{\omega_0}, \quad (2.14)$$

onde  $\phi(\omega)$  representa a mudança da fase dependente da frequência da função de transferência  $T(\omega)$ . O atraso de grupo corresponde a um deslocamento temporal do envelope de um pulso de banda limitada passando através de um sistema linear. Para um meio de comprimento  $L$ , a mudança de fase é dada por  $\phi(\omega) = -k(\omega)L$  e temos

$$t_g = \frac{d(kL)}{d\omega} = \frac{dk}{d\omega}L = v_g^{-1}L. \quad (2.15)$$

Estas duas quantidades parecem quase idênticas, mas o atraso de grupo é um conceito mais geral, porque pode ser definido mesmo para um sistema compacto. A relação entre os atrasos de grupo negativos e a superluminalidade será discutida de maneira mais clara na próxima seção.

## 2.5 Função de transferência para atrasos de grupo negativos

Nesta seção, lidaremos com uma função de transferência  $T(\omega)$  a fim de estudar atrasos de grupo negativos. Essa discussão pode ser aplicada tanto a propagação de um pulso elétrico em circuitos eletrônicos quanto à propagação da luz em um meio dispersivo.

Enquanto a relação de dispersão  $k(\omega)$  de meios dispersivos determina as mudanças de fase na propagação da luz, a função de transferência  $T(\omega)$  do circuito determina as mudanças de fase de um pulso de saída, em relação ao pulso de entrada no circuito. Mitchell e Chiao [6, 28] demonstraram atrasos negativos em um circuito de filtro passa-banda. Eles mostraram que, se a frequência está localizada fora da faixa de passagem, o pico do envelope do pulso de saída precede o pico do envelope do pulso de entrada. Usando outra configuração de um circuito eletrônico simples Kitano, Nakanishi e Sugiyama [13, 29] geraram atrasos de grupo negativos para pulsos com frequência da portadora igual a zero.

Como a análise da função de transferência de um circuito eletrônico é mais simples no domínio da frequência, definimos a tensão de entrada e a de saída em termos de suas

componentes de Fourier

$$V_{ent}(t) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} d\omega V_{ent}(\omega) e^{-i\omega t}, \quad (2.16)$$

e

$$V_{sai}(t) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} d\omega V_{sai}(\omega) e^{-i\omega t}. \quad (2.17)$$

A tensão de saída está relacionada à tensão de entrada por meio de uma função de transferência  $T(\omega)$  de maneira que

$$V_{sai}(\omega) = T(\omega) V_{ent}(\omega) \quad (2.18)$$

onde

$$T(\omega) \equiv A(\omega) e^{-i\phi(\omega)} \quad (2.19)$$

então

$$V_{sai}(\omega) = A(\omega) e^{-i\phi(\omega)} V_{ent}(\omega) \quad (2.20)$$

onde  $A(\omega)$  e  $\phi(\omega)$  são reais e representam, respectivamente, a amplitude e a fase da função transferência.

Vamos considerar a propagação de um pulso de banda estreita com frequência da portadora  $\omega_0 = 0$  através do amplificador. Se o pulso de entrada é descrito por

$$V_{ent}(t) = \int_{\Delta\omega} d\omega V_{ent}(\omega) \exp[-i\omega t], \quad (2.21)$$

onde  $\Delta\omega$  indica a integração sobre uma faixa de frequência estreita em torno de  $\omega_0$  na qual a amplitude do pulso é significativa, então a tensão de saída é dada por uma aproximação da fase estacionária

$$V_{sai}(t) = \int_{\Delta\omega} d\omega V_{ent}(\omega) A(\omega) \exp[-i(\omega t + \phi(\omega))] \quad (2.22)$$

$$\phi(\omega) \approx \phi_0 + \omega \left. \frac{d\phi}{d\omega} \right|_0 + \dots \quad (2.23)$$



assim

$$V_{sai}(t) \approx A(\omega) e^{-i\phi_0} \int_{\Delta\omega} d\omega V_{ent}(\omega) \exp \left[ -i\omega \left( t + \left. \frac{d\phi}{d\omega} \right|_0 \right) \right], \quad (2.24)$$

onde assumimos que  $A(\omega)$  não varia significativamente ao longo de  $\Delta\omega$  e que a expansão de Taylor de  $\phi(\omega)$  pode ser truncada nos termos de primeira ordem. Se definirmos o atraso de grupo como em (2.14)

$$t_g \equiv - \left. \frac{d\phi}{d\omega} \right|_0, \quad (2.25)$$

então o envelope da tensão de saída é obtido da equação (2.24) como

$$V_{sai}(t) \approx A(\omega) e^{i\phi_0} V_{ent}(t - t_g). \quad (2.26)$$

Assim, para as aproximações adotadas, esta última equação significa que, além do fator de fase, o envelope da tensão de saída é deslocado por um atraso de grupo  $t_g$ , em relação a entrada, mantendo a forma do pulso. Para  $t_g > 0$ , a entrada precede a saída (atraso positivo) e para  $t_g < 0$ , a saída precede à entrada (atraso negativo).

A relação entre atraso de grupo negativo e superluminalidade pode ser facilmente compreendida quando consideramos um sistema composto de um caminho de vácuo (comprimento  $L$ ) e um sistema compacto (atraso  $t_g$ ) que está localizado no final do caminho. O tempo total necessário para um pulso passar através do sistema é

$$t_{total} = \frac{L}{c} + t_g. \quad (2.27)$$

A velocidade correspondente  $v_g = L/t_{total}$  satisfaz a relação

$$\frac{1}{v_g} = \frac{1}{c} + \frac{t_g}{L} \quad (2.28)$$

Para  $t_g > 0$  (atraso positivo),  $v_g$  é menor que  $c$ . Para  $t_g < 0$  (atraso negativo), existem dois casos. No caso  $(-t_g) < L/c$ ,  $v_g$  é maior que  $c$ , enquanto no caso  $(-t_g) > L/c$ ,  $v_g$  torna-se negativa.

## 2.6 Princípios para geração de atrasos negativos em circuitos eletrônicos

Iniciaremos nossa discussão sobre os efeitos de superluminalidade em circuitos eletrônicos utilizando como ponto de partida o conceito de atraso de grupo negativo. Os circuitos eletrônicos normalmente são muito pequenos em tamanho, em comparação com os comprimentos de onda correspondentes às frequências típicas de operação destes circuitos, assim, o atraso positivo em pulsos, devido à velocidade de propagação através destes circuitos é normalmente insignificante. No entanto, uma concatenação de circuitos de atraso negativos, periodicamente intercalados em seqüência ao longo de uma linha de transmissão, poderá conduzir à propagação de pulsos superluminais ou, até mesmo, com uma velocidade de grupo negativa. Vamos nos concentrar aqui, apenas em como um atraso de grupo negativo pode, em geral, ser gerado [30].

### 2.6.1 Atrasos de grupo negativos exigidos pelas "Regras de Ouro"

Na Figura 2.5, mostramos um amplificador operacional com um pulso de entrada na porta não-inversora (+) do amplificador.

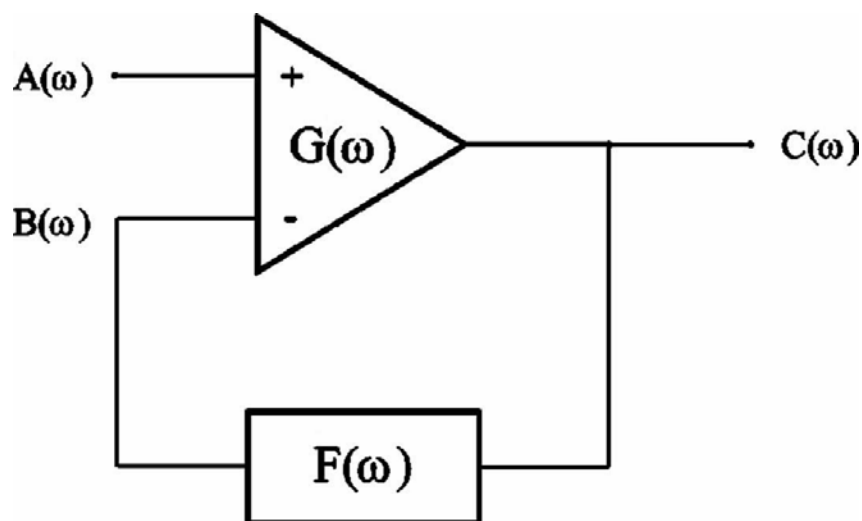


Figura 2.5: Circuito amplificador operacional com realimentação negativa [30].

A porta de saída do amplificador está realimentando a porta inversora ( $-$ ) do amplificador por meio de uma caixa preta, que representa um circuito linear passivo com uma função de transferência complexa arbitrária  $F(\omega)$  para um pulso na frequência  $\omega$ . Assim, temos um circuito amplificador linear com um ciclo de realimentação negativa contendo um filtro passivo. Em geral, a função de transferência de qualquer circuito linear passivo, tal como um filtro passa-baixa  $RC$ , sempre levará a um atraso de propagação positiva através do circuito.

No entanto, para amplificadores operacionais com um produto ganho-realimentação suficientemente alto, a diferença de voltagem entre os pulsos de entrada chegando à entrada inversora e à entrada não-inversora do amplificador deve ser nula em qualquer instante do tempo. O amplificador operacional deve fornecer um pulso com um atraso de grupo negativo em sua saída, de modo que o atraso positivo do filtro passivo seja exatamente cancelado por este atraso negativo na porta de entrada inversora ( $-$ ). O pulso da porta de entrada inversora ( $-$ ) será então quase idêntico ao da porta não-inversora ( $+$ ), satisfazendo assim a primeira regra "Regra de Ouro", discutida na seção 2.3, que exige uma diferença de voltagem nula nas portas ( $+$ ) e ( $-$ ) em qualquer instante do tempo. O resultado é que este circuito de realimentação negativa produzirá um pulso na saída, cujo pico deixa a porta de saída do circuito antes do pico do pulso incidente chegar à porta de entrada do mesmo.

Na Figura 2.6, mostramos, da referência [6], a primeira evidência experimental para este comportamento contra-intuitivo para o caso especial de um circuito passa-banda sintonizado  $RLC$  em ciclo de realimentação negativa.

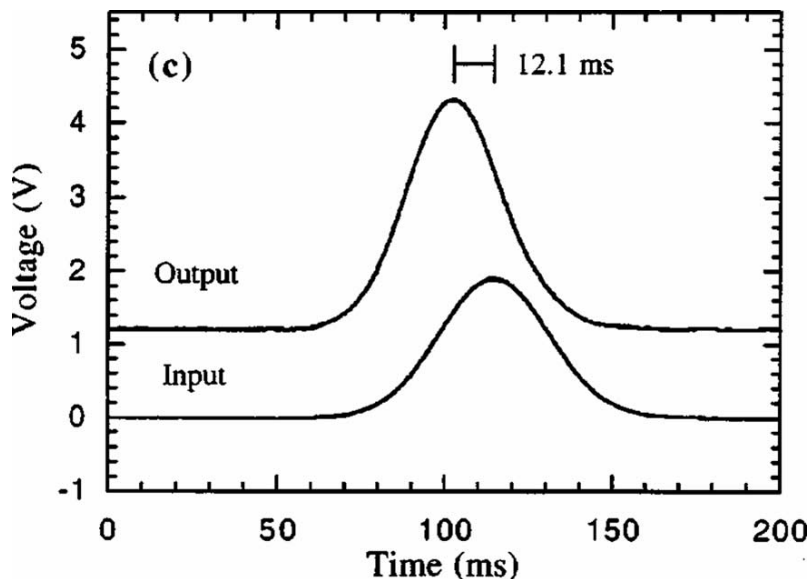


Figura 2.6: Resultado experimental mostrando o avanço do pulso [6].

O pico do pulso da saída é avançado aproximadamente 12 milissegundos em relação ao pico do pulso da entrada. Comparado ao pulso de entrada, o pulso da saída não foi significativamente distorcido, pelo circuito linear, além de um fator de amplificação discreto. Além disso, note que o avanço do pulso da saída é comparável em magnitude à largura temporal do pulso de entrada.

A não violação da causalidade, nesta mesma referência, é demonstrada em um segundo experimento, no qual a voltagem do sinal de entrada vai à zero, subitamente, no momento em que atinge seu máximo. O resultado é mostrado na Figura 2.7. Por inspeção, vemos que o sinal de saída também vai à voltagem zero, subitamente, e essencialmente no mesmo instante em que o sinal de entrada. Isso demonstra que os picos dos pulsos da entrada e da saída não estão causalmente conectados e que o circuito não pode avançar no tempo, mudanças verdadeiramente descontínuas na voltagem.

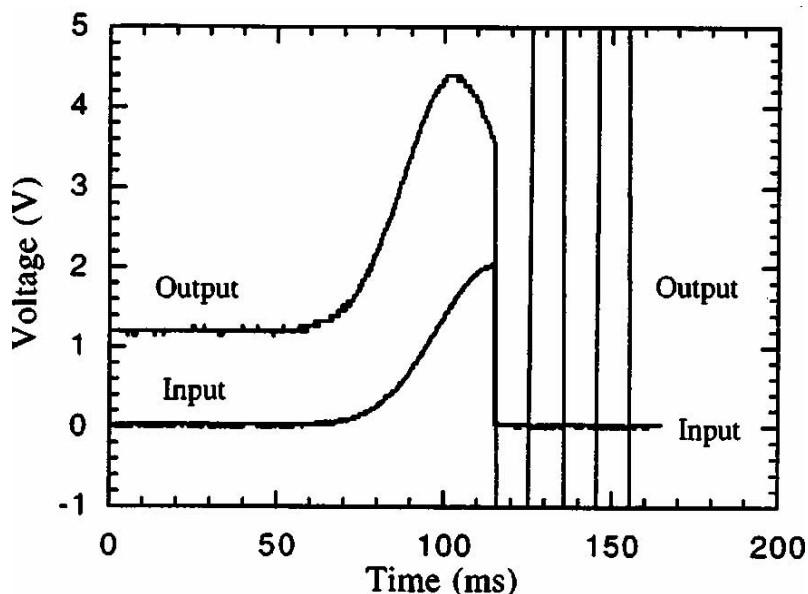


Figura 2.7: Resultado experimental mostrando que a descontinuidade não pode avançar [6].

Entretanto, como pode ser visto na Figura 2.7, o pulso de saída é fortemente distorcido após a chegada da descontinuidade, apresentando oscilações muito grandes. Este é um resultado importante, pois claramente indica que tais descontinuidades abruptas não poderia ter sido utilizadas no estudo da velocidade da informação em nosso circuito eletrônico neste trabalho. Uma abordagem mais adequada para codificar a informação em um pulso, será mostrada no próximo capítulo, utilizando pontos de não analiticidade em uma função com *SCS*, uma vez que os pontos de não analiticidade numa forma de onda estão diretamente ligados ao princípio da causalidade [17–19]. No entanto, as mudanças analíticas da forma de onda do pulso de entrada, tais como aquelas na parte inicial do pulso de entrada Gaussiano que usamos, o circuito, evidentemente, tem a capacidade de extrapolar a forma de onda da entrada para o futuro, de tal forma a reproduzir a saída do pico do pulso Gaussiano antes que o pico do pulso da entrada tenha chegado. Nesse sentido, o circuito antecipa a chegada do pulso Gaussiano.

## 2.6.2 Inversão da função de transferência dos circuitos lineares passivos

Vamos analisar agora sob quais condições as “Regras de Ouro” se mantêm e os atrasos de grupo negativos são produzidos. Na Figura 2.5,  $A(\omega)$  representa a amplitude complexa de um pulso de entrada de frequência  $\omega$  na porta não-inversora (+) e  $B(\omega)$  refere-se a amplitude complexa do pulso de realimentação para a porta inversora (-) do amplificador. O pulso de saída  $C(\omega)$  está então relacionado ao pulso de realimentação  $B(\omega)$ , por meio da função de transferência de realimentação linear complexa  $F(\omega)$  (caixa preta) como segue:

$$B(\omega) = F(\omega) C(\omega). \quad (2.29)$$

O ganho de voltagem do amplificador operacional é caracterizado pela função de transferência linear complexa ativa  $G(\omega)$ , que amplifica a diferença de voltagem entre os pulsos de entradas (+) e (-) para produzir um pulso de saída da seguinte forma:

$$C(\omega) = G(\omega) (A(\omega) - B(\omega)) \quad (2.30)$$

ou

$$C(\omega) = G(\omega) (A(\omega) - F(\omega) C(\omega)) \quad (2.31)$$

então

$$C(\omega) = \frac{G(\omega) A(\omega)}{1 + F(\omega) G(\omega)}. \quad (2.32)$$

Definindo a função de transferência complexa total  $T(\omega) \equiv C(\omega)/A(\omega)$  como a razão entre o pulso de saída  $C(\omega)$  e o pulso de entrada  $A(\omega)$ , obtemos a função de transferência,

$$T(\omega) = \frac{G(\omega)}{1 + F(\omega) G(\omega)}. \quad (2.33)$$

Se o produto ganho-realimentação é muito grande comparado a unidade, ou seja,

$$|F(\omega) G(\omega)| \gg 1, \quad (2.34)$$

vemos que para uma boa aproximação, a equação (2.33) nos leva à inversão da função de transferência de qualquer circuito linear passivo através do circuito de realimentação negativa, ou seja,

$$T(\omega) = 1/F(\omega) = (F(\omega))^{-1} \quad (2.35)$$

Isto também implica através da equação (2.30), que a “Regra de Ouro,”

$$A(\omega) \approx B(\omega) \quad (2.36)$$

se mantém sob estas mesmas condições.

### **2.6.3 Transporte de energia por pulsos nos domínios ópticos e eletrônicos**

No domínio da óptica, existem debates sobre se, a velocidade da energia transportada por um pacote de onda pode, ou não, exceder  $c$ , quando a velocidade de grupo deste pacote de onda é superior a  $c$ . Sommerfeld e Brillouin mostraram que, no caso da dispersão anômala dentro de uma linha de absorção, a velocidade da energia definida como em (1.160):

$$v_{energia} \equiv \frac{\mathbf{S}}{W},$$

é diferente da velocidade de grupo [2, 16], onde  $\mathbf{S}$  é o vetor de Poynting e  $W$  é a densidade de energia da onda eletromagnética. Considerando que a velocidade de grupo excede  $c$  na região de dispersão anômala absorptiva, eles encontraram que a velocidade da energia nesta região é menor que  $c$ . No entanto, experimentos com pulsos de laser de picosegundo se propagando em meios de dispersão anômala absorptiva, mostraram que estes pulsos viajam com uma velocidade de grupo superluminal, e não com a velocidade de energia subluminal de Sommerfeld e Brillouin [4]. Assim, o significado físico desta velocidade de energia é obscuro.

Quando o meio óptico possui ganho, como no caso de meios como o laser com populações atômicas invertidas, surge uma ambigüidade quanto ao fato de se incluir ou não,

na definição de  $W$ , a energia armazenada nos átomos com populações invertidas [31]. No entanto, em regiões de dispersão anômala bem fora da linha de ganho, e, em particular, numa região espectral onde a dispersão da velocidade de grupo desaparece, uma simples aplicação da definição de Sommerfeld e Brillouin sobre a velocidade de energia implicaria que tanto a velocidade de grupo quanto a velocidade de energia excede  $c$ . A igualdade destes dois tipos de velocidades de onda surge porque os pulsos de luz estão propagando dentro de um meio transparente com pouca dispersão. Em particular, no caso em que a velocidade de energia é negativa, o pico máximo de energia do pulso transmitido deixa a face de saída do meio óptico antes do pico máximo de energia do pulso incidente chegar à face de entrada do meio. Um estudo recente definiu a velocidade de energia em termos de uma integral média de tempo para o vetor de Poynting, sem qualquer utilização do conceito de "densidade de energia", e, portanto, evita a ambigüidade acima associada com a definição da densidade de energia do meio óptico [32]. O resultado é que a velocidade da energia assim definida pode ser superluminal.

No caso do circuito eletrônico com realimentação negativa que produz atraso grupo negativo, a questão de quando o pico da energia de um pulso transmitido através do circuito chega a porta de saída, pode ser respondida fechando a porta de saída do circuito da Figura 2.5 através de um resistor de carga, que conecta a saída ao terra. O resistor (não demonstrado) será aquecido pela energia do pulso de saída. É óbvio que o resistor experimentará a quantidade máxima de aquecimento, quando o pico do pulso Gaussiano de saída chegar a este resistor, e isso acontecerá quando o pico de tensão da onda de saída chegar. Para atrasos grupo negativos, o resistor aquecerá mais cedo do que o esperado. No entanto, não existe nenhum mistério neste fato: O amplificador operacional pode fornecer a energia necessária para aquecer o resistor antes do tempo. O atraso de grupo negativo e o atraso energia negativa são idênticos um ao outro, e do mesmo modo, a velocidade de grupo negativa e também velocidade de energia negativa são iguais.



## 2.7 Analogias entre sistemas atômicos e circuitos eletrônicos

Analogias entre sistemas atômicos e circuitos eletrônicos têm se demonstrado historicamente frutíferas. Nesta seção vamos explorar estas analogias em relação à idéia, recentemente proposta, de superluminalidade, ou seja, velocidade de grupo maior que  $c$ . Veremos que os circuitos eletrônicos amplificadores análogos a meios atômicos, também podem dar origem a efeitos superluminais.

Como um exemplo específico, demonstramos que um simples amplificador ajustado apresenta atrasos negativos. Tal circuito é um análogo eletrônico do modelo de Lorentz para sistemas atômicos. Quando uma linha de transmissão possui tais amplificadores inseridos em si, periodicamente, ela se comporta como um meio que possui velocidade de grupo superluminal. Qualquer onda cujo espectro seja restrito a uma região de atrasos negativos irá propagar ao longo da linha de transmissão mais rápido que  $c$ , com pouca mudança de sua forma ou amplitude.

Embora tanto amplificadores atômicos como eletrônicos pareçam antecipar as suas entradas, não há nenhuma contradição com a casualidade em qualquer desses sistemas. Qualquer mudança descontínua no pulso passará com atraso nulo através do amplificador, e em  $c$  pela linha de transmissão. Outra maneira de ver isso é observar que a resposta ao impulso é estritamente causal. Na verdade, a casualidade exige que existam regiões de atraso de grupo negativo perto de linha de ganho. Isto implica que uma grande variedade de amplificadores apresentam atrasos de grupo negativos e as nossas conclusões não são limitadas somente a este modelo simples.

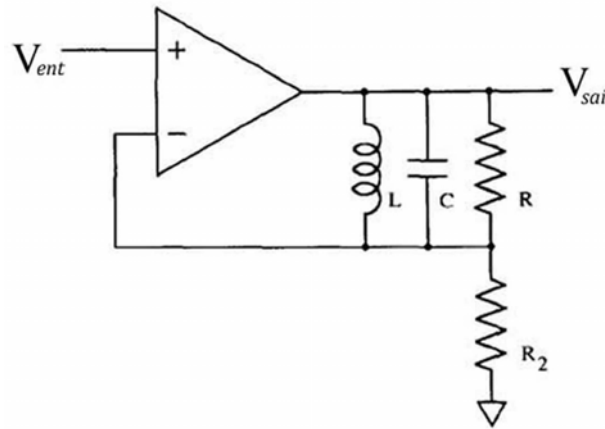


Figura 2.8: Circuito amplificador sintonizado que exibe atrasos negativos em certas regiões do espectro de frequência.

### 2.7.1 O amplificador sintonizado

Como exemplo, considere o amplificador sintonizado mostrado na Figura 2.8, que consiste de um amplificador operacional com realimentação negativa através de um divisor de tensão constituído de um resistor e um ressonador  $RLC$ . Durante todo o tempo, assumimos que o amplificador operacional pode ser tratado como ideal, ou seja,  $V_{(+)} = V_{(-)}$ . Para satisfazer esta condição, uma corrente

$$I = \frac{V_{ent}}{R_2} \quad (2.37)$$

deve fluir através do ressonador  $RLC$ , implicando que, para uma componente de Fourier simples  $\omega$ , a tensão de saída está acima da tensão de entrada por uma quantidade

$$V_{sai} - V_{ent} = I \left( \frac{i\omega LR}{R - \omega^2 LRC + i\omega L} \right) \quad (2.38)$$

ou

$$V_{sai} - V_{ent} = \frac{I}{C} \left( \frac{i\omega}{\frac{1}{LC} - \omega^2 + i\omega \frac{1}{RC}} \right) \quad (2.39)$$

ou então,

$$V_{sai} - V_{ent} = \frac{I}{C} \left( \frac{i\omega}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega} \right) \quad (2.40)$$

onde  $\omega_0^2 \equiv 1/LC$  e  $\gamma \equiv 1/RC$ . Note que isto é análogo ao comportamento de um oscilador de Lorentz, cujo momento de dipolo induzido  $p$  satisfaz

$$p = E \frac{fe^2}{m} \left( \frac{-i\omega}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} \right) \quad (2.41)$$

onde  $\omega_0^2 \equiv k/m$ ,  $\gamma$  é um termo de amortecimento fenomenológico e  $f$  é a força do oscilador. Para completar a analogia, fazemos as identificações  $C \longleftrightarrow m$ ,  $L \longleftrightarrow 1/k$ , e  $I \longleftrightarrow Efe^2$ .

A função de transferência total para o amplificador sintonizado acima

$$T(\omega) = 1 + \frac{1}{R_2C} \left( \frac{i\omega}{\frac{1}{LC} - \omega^2 + i\omega\frac{1}{RC}} \right) \quad (2.42)$$

ou

$$T(\omega) = 1 + \frac{i\gamma_2\omega}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega} \quad (2.43)$$

onde  $\gamma_2 \equiv 1/R_2C$ , exibe ganho perto  $\omega_0$  e uma mudança de fase  $\phi(\omega) = \arg(T(\omega))$ , que aumenta com o aumento da frequência, exceto perto do pico de ganho, como mostrado na Figura 2.9.

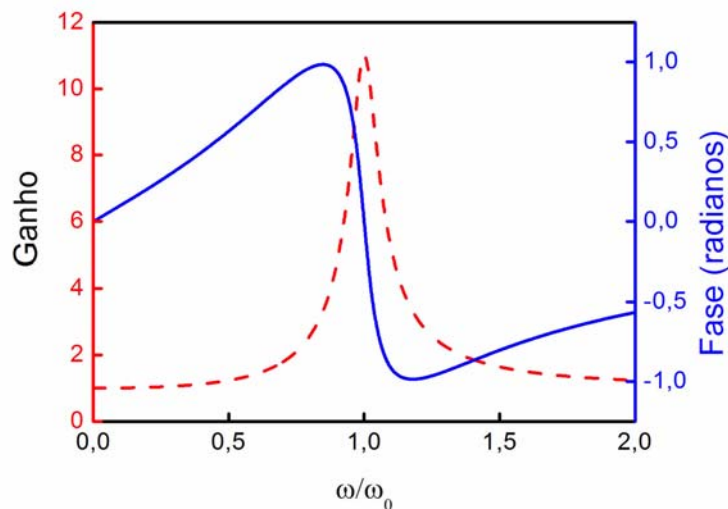


Figura 2.9: Fase (curva sólida azul) e ganho (curva tracejada vermelha) da função de transferência para o amplificador sintonizado mostrado na Figura 2.8. Parâmetros:  $\gamma = 0,1\omega_0$  e  $\gamma_2 = 10\gamma$ .

Uma vez que as funções ganho e fase decorrentes de  $T(\omega)$  são dadas, respectivamente, por

$$A(\omega) = \sqrt{(\Re[T(\omega)])^2 + (\Im[T(\omega)])^2} \quad (2.44)$$

e

$$\phi(\omega) = \arctan\left(\frac{\Im[T(\omega)]}{\Re[T(\omega)]}\right), \quad (2.45)$$

temos

$$A(\omega) = \left[1 + \frac{\gamma_2(2\gamma + \gamma_2)\omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}\right]^{1/2}, \quad (2.46)$$

$$\phi(\omega) = \arctan\frac{\gamma_2\omega(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma(\gamma + \gamma_2)\omega^2}. \quad (2.47)$$

O atraso de grupo,

$$t_g = -\frac{d\phi(\omega)}{d\omega} = -\frac{\gamma_2(\omega_0^2 - \omega^2) [\gamma(\gamma + \gamma_2)\omega^2 - (\omega_0^2 + \omega^2)^2]}{[A(\omega)]^2 [(\omega_0^2 + \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2]^2} \quad (2.48)$$

é, portanto, negativo para frequências fora da linha de ganho, incluindo três pontos de dispersão com atraso de grupo zero, um de cada lado do pico de ganho e um no limite de  $\omega \rightarrow \infty$  (ver Figura 2.10).

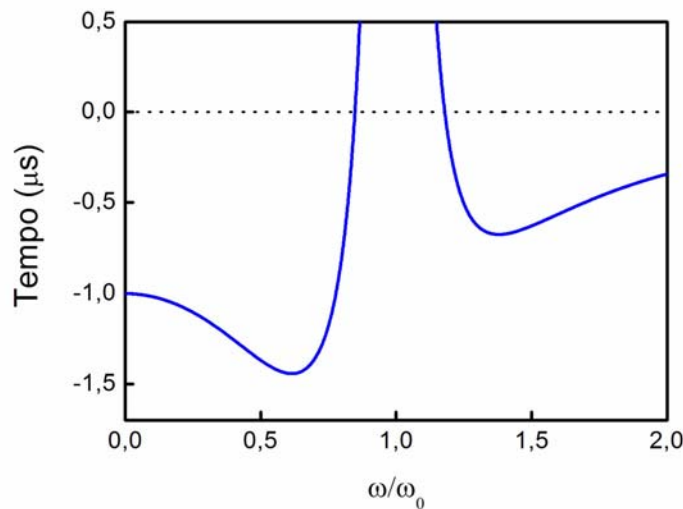


Figura 2.10: Atraso de grupo para a função de transferência do amplificador sintonizado mostrado na Figura 2.8, como uma função da frequência da portadora. Parâmetros:  $\gamma = 0,1\omega_0$  e  $\gamma_2 = 10\gamma$ .

Por exemplo, se o pulso de entrada é um pulso suave, e com frequência da portadora muito menor do que a frequência de ressonância, o pulso de saída será um pulso de forma muito semelhante, mas o seu pico aparecerá na porta de saída um pouco antes do pico do pulso de entrada chegar a porta de entrada do circuito. Não há qualquer contradição com a causalidade. Isto pode ser visto observando que a resposta ao impulso do amplificador é estritamente causal, portanto, o pulso na saída em um tempo  $t$  depende apenas do pulso na entrada em tempos  $t' < t$ .

A analogia entre um amplificador sintonizado simples e um átomo simples sugere outra analogia: Uma linha de transmissão com vários amplificadores sintonizados inseridos em cascata é análoga a um meio composto de muitos átomos, ou seja, um amplificador óptico.

Considere uma linha de transmissão de comprimento  $l$ , sem dispersão, composta por  $n$  amplificadores sintonizados por unidade de comprimento (ver Figura 2.11).

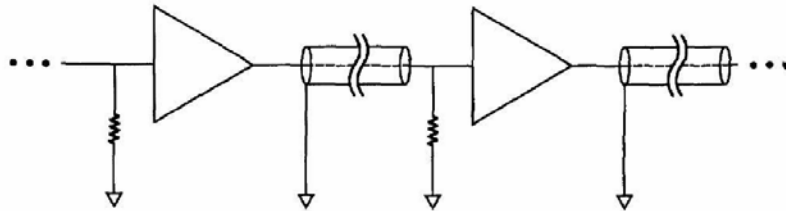


Figura 2.11: Linha de transmissão superluminal formada por seções da linha de transmissão normal intercaladas com o amplificador sintonizado mostrado na figura 2.8.

Um pulso de frequência  $\omega$  acumula uma fase de

$$\phi_{TL} = \frac{l\omega}{c} + nl\phi(\omega), \quad (2.49)$$

na travessia da linha de transmissão, onde  $c$  é a velocidade da luz no vácuo. Isto implica na relação de dispersão

$$k = \frac{\omega}{c} + n\phi(\omega) \quad (2.50)$$

que, no limite de baixo ganho por amplificador, ou seja,  $R_2/R$  grande, torna-se

$$k = \frac{\omega}{c} + (\omega_0^2 - \omega^2) \frac{n\omega}{R_2 C} \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}.$$

Isso é análogo à relação de dispersão para um gás diluído de  $n_L$  osciladores Lorentz por unidade de volume

$$k = \frac{\omega}{c} + (\omega_0^2 - \omega^2) \frac{2\pi |f| n_L e^2}{mc} \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}.$$

A linha de transmissão amplificada mostra velocidades de grupo superluminais e não há aqui nenhuma contradição com a causalidade.

A reformulação do pulso devido à mudança de fase em um circuito está relacionada à sua atenuação ou ganho pela lei de Bode [33], exatamente como a dispersão de uma onda em um meio óptico está ligado à sua atenuação ou ganho pelas relações Kramers-Kronig [9,10]. A analogia entre sistemas ópticos e circuitos eletrônicos é baseada no uso de funções respostas lineares, causais, similares em ambos sistemas. Sabemos que as tensões de entrada e saída de um circuito estão relacionadas no domínio da frequência por

$$V_{sai}(\omega) = T(\omega) V_{ent}(\omega). \quad (2.51)$$

Isto é equivalente à convolução da transformada de Fourier

$$V_{sai}(t) = \int_0^\infty T(t') V_{ent}(t-t') dt'.$$

Observe que a causalidade aqui tem sido aplicada, insistindo em que a função de transferência  $T(t')$  é nula para os tempos menores que zero, ou seja, antes que qualquer sinal tenha chegado. No domínio complexo da frequência isto corresponde à analiticidade de  $T(\omega)$  no semiplano complexo superior.

## 2.8 Conclusão

Neste capítulo, estudamos as condições necessárias para construir um circuito eletrônico com analogias a um sistema atômico, e quando inseridos em castata numa linha de trans-

---

missão, tais circuitos se comportam como um meio que apresentam velocidades de grupo superluminais. Para isto, abordamos algumas das principais características dos amplificadores operacionais e suas formas de operação, tais como as regras de ouro e a realimentação negativa. Em seguida, introduzimos o conceito de atraso de grupo negativo e os princípios gerais para geração de atrasos de grupo negativo em circuito eletrônicos. Por fim demonstramos que a propagação superluminal de pulsos elétricos nestes circuitos eletrônicos não viola o princípio da causalidade.

## Capítulo 3

# Velocidade da Informação: Discussões e Resultados

### 3.1 Introdução

Neste capítulo estudaremos o conceito de informação numa forma de onda e de que maneira podemos associá-la a pontos não analíticos. Neste trabalho, associamos a informação a pontos não analíticos utilizando um pulso com *SCS*. Este tipo de pulso é particularmente interessante porque ele existe numa região bem definida do espaço (ou do tempo), diferentemente do que ocorre no caso de um pulso Gaussiano, por exemplo. Em seguida, apresentaremos o modelo do circuito eletrônico utilizado em nosso estudo e as características da função de transferência deste circuito. Enquanto a relação de dispersão  $k(\omega)$  de meios dispersivos determina as mudanças de fase na propagação da luz, a função de transferência  $T(\omega)$  do circuito determina as mudanças de fase de um pulso de saída, em relação ao pulso de entrada no circuito.

Por fim, apresentaremos os resultados obtidos em nosso estudo, sobre a propagação de um pulso Gaussiano e de um pulso com *SCS* em circuitos eletrônicos com atraso de grupo negativo. Veremos que, apesar do pico do pulso com *SCS* se propagar com uma velocidade maior que a da luz no vácuo, sem violar o princípio da causalidade, a velocidade do ponto não analítico na asa dianteira deste pulso é limitada à velocidade da luz no vácuo  $c$ .



## 3.2 O que é informação?

Nesta seção discutiremos o conceito de informação e o sentido no qual o mesmo é abordado neste trabalho.

Em estudos sobre a propagação de pulsos em meios superluminais, são raras as definições do que se entende por uma informação<sup>1</sup> codificada numa forma de onda. As discussões, no primeiro capítulo deste trabalho, sobre a definição de sinal por Sommerfeld sugere que um ‘*sinal*’ envolve uma nova informação ou elemento de surpresa que não poderia ter sido previsto a partir do movimento da onda em um tempo anterior.

A luz vermelha de um semáforo, diz ao motorista para parar e, provavelmente, alguém diria que isso representa uma informação. Mas, um condutor parado num semáforo em luz vermelha não está aprendendo nada novo, sobre o que vê no mesmo; ou seja, a luz vermelha do semáforo não está enviando qualquer informação. Poderíamos dizer que uma informação é transmitida ao condutor quando a luz do semáforo muda de vermelho para verde. Entretanto, se o motorista viu o semáforo mudar de verde para vermelho, quando ele aproximou-se do cruzamento, e sabe que a luz do semáforo muda a cada 30s, então, nesse sentido ele não está adquirindo nenhuma nova informação, quando a luz do semáforo volta ao verde.

Da mesma forma, a chegada do pico de um pulso superluminal, com continuidade analítica (exemplo: pulso Gaussiano), não está nos dando nenhuma informação que já não estivesse contida numa pequena porção inicial da asa do pulso. Novas informações aparecem apenas nos pontos de não analiticidade na forma de onda. A velocidade destes pontos é limitada à velocidade da luz no vácuo  $c$ , não importa quão grande seja a velocidade de grupo. Assim, nenhuma informação pode ser propagada com uma velocidade maior que  $c$ . Uma informação no sentido aqui usado é alguma mudança na forma de onda

---

<sup>1</sup>Um dicionário define uma informação como o resultado do processamento, manipulação e organização de dados de tal forma que represente uma modificação no conhecimento do sistema que a recebe.

que não pode ser prevista com antecedência.

### 3.3 Experimentos sobre a velocidade da informação

Baseados nas previsões de Garret e McCumber [3], Chu e Wong [4] realizaram o primeiro experimento demonstrando que pulsos ópticos podem se propagar com velocidades de grupo superluminais sem qualquer distorção significativa na forma do pulso. Entretanto, embora este e outros trabalhos tenham sido feitos considerando a propagação de pulsos em regimes superluminais, são raros os experimentos que exploraram a diferença entre a velocidade de grupo superluminal e a velocidade da informação, ou seja, a diferença entre a velocidade de grupo e a velocidade na qual a informação codificada em uma forma de onda pode ser transmitida.

A velocidade da informação foi por vezes definida como a velocidade em que o ponto de intensidade a meia altura do pico máximo de um pulso se propaga [2]. Entretanto, não podemos considerar isso como uma definição satisfatória de informação, porque, em um pulso Gaussiano, por exemplo, a intensidade do ponto a meia altura do pico máximo não pode transmitir nenhuma informação nova que não estivesse presente numa pequena porção inicial da asa do pulso [19].

Vários pesquisadores têm argumentado que a propagação de novas informações, ou um ‘*senal*’, exige uma descontinuidade numa onda ou em uma de suas derivadas [11]. Um sinal assim definido tem satisfeita a propriedade de não poder ser propagado com uma velocidade superior a  $c$ : não pode haver violação da causalidade Einstein.

Um experimento considerado particularmente significativo na definição da velocidade do ‘*senal*’ foi relatado por Stenner *et al* [7]. O objetivo do experimento foi a medida, pela primeira vez, da velocidade com que a informação codificada em um pulso superluminal é transmitida. Pulsos foram moldados por um formatador de formas de ondas, de maneira que as informações neles codificadas fossem, idealmente, representadas por

descontinuidades. Assim, perto do pico de um pulso Gaussiano a amplitude do restante da duração do pulso era transferida para uma amplitude alta “1” ou uma amplitude baixa “0”. Se estas mudanças pudessem ser feitas instantaneamente, como na Figura 3.1 teríamos, na verdade, uma frente afiada que, de acordo com as nossas discussões anteriores, deve propagar-se com a velocidade  $c$  da luz no vácuo.

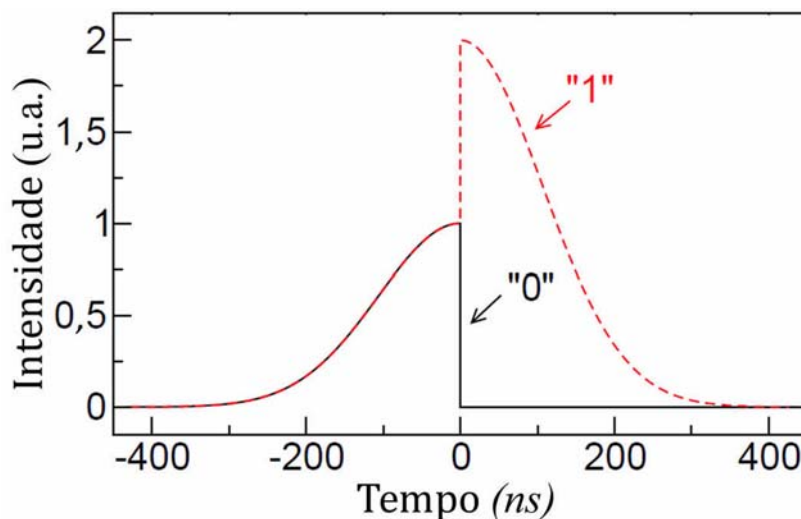


Figura 3.1: Forma do pulso idealizado no experimento de Stenner. Note que os dois pulsos são inicialmente idênticos. A informação está contida no ponto onde eles divergem.

Naturalmente, as condições de continuidade impostas pelas equações de Maxwell, de maneira a produzir um tempo de resposta eletrônica finita, têm o efeito de suavizar as mudanças descontínuas na amplitude, mas a questão de com que velocidade as informações que temos em “0” ou em “1” podem ser transmitidas continua sendo interessante. Entretanto, neste experimento o tempo necessário para detectar a informação foi maior para a propagação da luz através do meio superluminal do que no vácuo. Os resultados sugerem que mesmo para a propagação superluminal, a velocidade da informação, como esperado, é menor do que  $c$ , mas o desvio padrão associado à medida é muito grande e o experimento não fornece uma medida precisa da velocidade da informação.

### 3.4 Informação em pontos não analíticos numa função com SCS

Nesta seção abordaremos o conceito de informação associada a pontos não analíticos numa função com SCS.

De acordo com os conceitos de informação, aqui discutidos, vemos que não é possível codificar a informação em um pulso analítico, uma vez que toda a informação transmitida numa forma de onda aparece apenas em pontos de não analiticidade. Na verdade, a idéia de que a informação pode ser associada a pontos não analíticos estava implícita na definição de sinal por Sommerfeld e uma generalização desta definição foi proposta por Chiao e Steinberg [17], que definiram uma informação idealizada como ‘*o conjunto completo de todos os pontos não analíticos, juntamente com os valores da função de entrada  $f(t)$  em um intervalo de tempo pequeno mas finito, dentro de um domínio analítico, imediatamente após esses pontos*’. Ou seja, se uma função analítica é conhecida em qualquer intervalo finito (mas arbitrariamente pequeno), ela é conhecida em todos os pontos. Entretanto, se uma forma de onda consiste de um ponto não analítico e após este ponto ela é verdadeiramente analítica, então tudo o que há para saber sobre a forma de onda pode ser conhecido imediatamente após a chegada do ponto não analítico. Porém, se há um segundo ponto de não analiticidade numa região posterior ao primeiro ponto, na forma de onda, nada do que está além deste segundo ponto não analítico pode ser conhecido com antecedência.

Como resultado eles afirmaram que a velocidade da informação é igual à velocidade destes pontos não analíticos. Entretanto os estudos sobre a velocidade da informação usando estes conceitos, têm tratado estes pontos de não analiticidade na forma de descontinuidades abruptas, tal como uma função degrau na forma da onda [7, 8]. Uma vez que uma descontinuidade envolve componentes de frequências infinitas e,  $n(\omega) = 1$

quando  $\omega \rightarrow \infty$ , portanto, as discontinuidades se propagam em  $c$ . Mas de um ponto de vista físico, essa abordagem parece ser inadequada. Na verdade, essas discontinuidades idealizadas estão em contradição com a condição de continuidade do campo elétrico clássico definido pelas equações de Maxwell para um meio dielétrico sem cargas. Diante deste fato e da dificuldade da realização experimental de discontinuidades abruptas em pulsos eletromagnéticos, utilizamos neste trabalho, uma nova abordagem, proposta por *J. M. Hickmann*, para modelar a informação em pulso eletromagnéticos e utilizada por Silva [21], em seus estudos numéricos sobre a velocidade da informação em sistemas atômicos de dois níveis.

Em seus estudos, Silva considerou a propagação de um pulso baseado em uma função com *SCS*. Esta função tem a propriedade de ser diferente de zero numa região finita, além de ser uma função infinitamente derivável, isto é, uma função que tem derivadas contínuas para todas as ordens. Esta classe de função também possui componentes de frequência finitas e transforma de Fourier. A função com *SCS* aqui investigada, apresenta a descrição matemática discutida na seção 1.11 do primeiro capítulo deste trabalho.

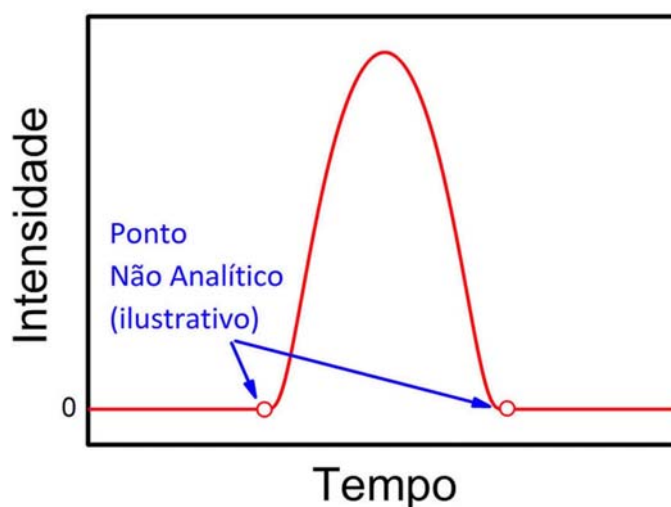


Figura 3.2: Esquema de um pulso com suporte compacto.

Na Figura 3.2, temos um desenho representando a função com *SCS* utilizada, onde os pontos grandes brancos representam os pontos não analíticos e a parte central da função é suavemente emendada a uma função nula. Agora, a informação será, inicialmente, associada a estes pontos não analíticos suaves presentes nas asas frontal e traseira do pulso. O pulso ou qualquer uma de suas derivadas não apresentam qualquer descontinuidade, em contradição direta com a literatura padrão que alega a necessidade de uma frente descontínua ou derivadas descontínuas, a fim de codificar a informação [11]. Esta abordagem nos pareceu ser mais adequada para ser aplicada a sistemas físicos, devido ao fato de que a função descrevendo o campo eletromagnético pode ser infinitamente derivável, mesmo nos pontos de não analiticidade. Assim, a transmissão da informações pode ser modelada pela propagação de um pulso, que é descrito por uma função matemática com pontos não analíticos no domínio do tempo, através de um meio.

Podemos citar quatro vantagens práticas para o uso dessas funções: primeiro, elas não possuem um conjunto muito grande de componentes de frequência para ser representada no domínio recíproco, o que é muito conveniente dado a região limitada de frequência da dispersão anômala nos sistemas ópticos e a de atrasos de grupo negativo em circuitos eletrônicos; segundo elas são diferentes de zero numa região limitada; terceiro, elas não possuem qualquer descontinuidade, pois são ligadas suavemente em zero, e em quarto lugar, é bastante fácil criar experimentalmente a parte nula desta função.

### 3.5 Circuito e o experimento

Nesta seção apresentaremos o modelo de circuito eletrônico usado em nosso estudo e estudaremos suas configurações, necessárias para geração de atraso de grupo negativo.

### 3.5.1 O circuito e a função de transferência

Em nosso estudo utilizamos o modelo de circuito de atraso negativo proposto por Kitano *et al* [29], mostrado na Figura 3.3.

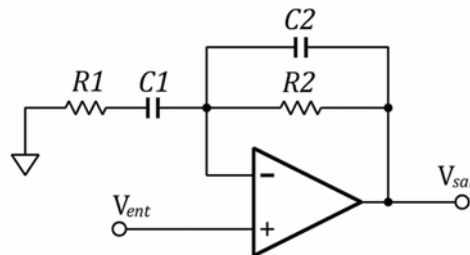


Figura 3.3: Modelo do circuito de atraso negativo utilizado em nossos estudos.

Sabemos da seção 2.5 que a função de transferência  $T(\omega)$  do circuito determina as mudanças de fase de um pulso da saída, em relação ao pulso da entrada. Como a análise da função de transferência de um circuito eletrônico é mais simples no domínio da frequência, usando as transformadas de Fourier é possível representar a impedância dos elementos passivos deste circuito como função de  $\omega$ . Assim, as relações nas equações (2.1) e (2.2), podem ser reescritas no domínio da frequência como

$$V(\omega) = RI(\omega) \quad (3.1)$$

e

$$V(\omega) = \frac{1}{i\omega C}I(\omega) \quad (3.2)$$

respectivamente. Destas relações, encontramos as impedâncias complexas no resistor

$$Z_R = R \quad (3.3)$$

e no capacitor

$$Z_C = \frac{1}{i\omega C}. \quad (3.4)$$

O primeiro passo na determinação da função de transferência total  $T(\omega)$  do nosso circuito eletrônico é determinar a função de transferência  $F(\omega)$ , do filtro linear passivo utilizado na realimentação do circuito. Para isto, vamos converter todos os elementos no diagrama do circuito para suas impedâncias complexas equivalentes, como na Figura 3.4.

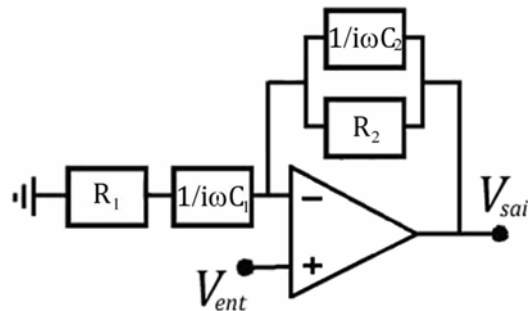


Figura 3.4: Representação dos elementos, do circuito de atraso de grupo negativo, através de sua impedância complexa equivalente .

O próximo passo é reduzir os componentes em série e paralelo do circuito, expressando cada uma destas partes em termos da impedância equivalente da montagem em série e paralelo. Desta forma,  $R_1$  e  $C_1$  podem ser combinados para formar a impedância equivalente

$$Z_1 = R_1 + \frac{1}{i\omega C_1} \quad (3.5)$$

ou

$$Z_1 = \frac{1 + i\omega R_1 C_1}{i\omega C_1}, \quad (3.6)$$

e de maneira semelhante,  $R_2$  e  $C_2$  podem ser combinados para formar a impedância equivalente

$$Z_2 = \frac{1}{\frac{1}{R_2} + i\omega C_2} \quad (3.7)$$

ou

$$Z_2 = \frac{R_2}{1 + i\omega R_2 C_2} \quad (3.8)$$



Com estas duas simplificações, o diagrama do circuito equivalente está mostrado na Figura 3.5.

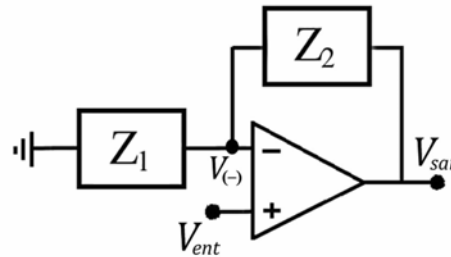


Figura 3.5: Simplificação do circuito em termos das impedância equivalentes  $Z_1$  e  $Z_2$ .

Neste ponto, aplicamos a segunda “Regra de ouro” para o AmpOp operando com realimentação [27], a qual afirma que os terminais (+) e (-) do AmpOp não consomem corrente. Com estes pressupostos, o circuito para o cálculo da função de transferência  $F(\omega)$  do filtro linear passivo utilizado na realimentação se reduz ao mostrado na Figura 3.6.

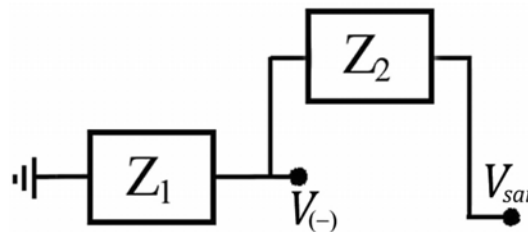


Figura 3.6: Circuito resultante da aplicação das "Regras de Ouro".

Note que as correntes através de  $Z_1$  e  $Z_2$  são iguais. Então, usando a lei de Ohm, encontramos que a tensão em  $V_{(-)}$  é dada por

$$V_{(-)} = I Z_1 \quad (3.9)$$

e a tensão em  $V_{sai}$  é

$$V_{sai} = I (Z_1 + Z_2). \quad (3.10)$$

Uma vez que estas correntes são iguais, temos

$$\frac{V_{(-)}}{Z_1} = \frac{V_{sai}}{Z_1 + Z_2} \quad (3.11)$$

e então

$$\frac{V_{(-)}}{V_{sai}} = \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} \quad (3.12)$$

ou

$$F(\omega) = \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2}. \quad (3.13)$$

A resposta em frequência, da amplitude e da fase da função de transferência deste filtro são mostrados na Figura 3.7, para componentes de valores  $R_1 = 10k\Omega$ ,  $C_1 = 0.22\mu F$ ,  $R_2 = 1M\Omega$  e  $C_2 = 22nF$ .

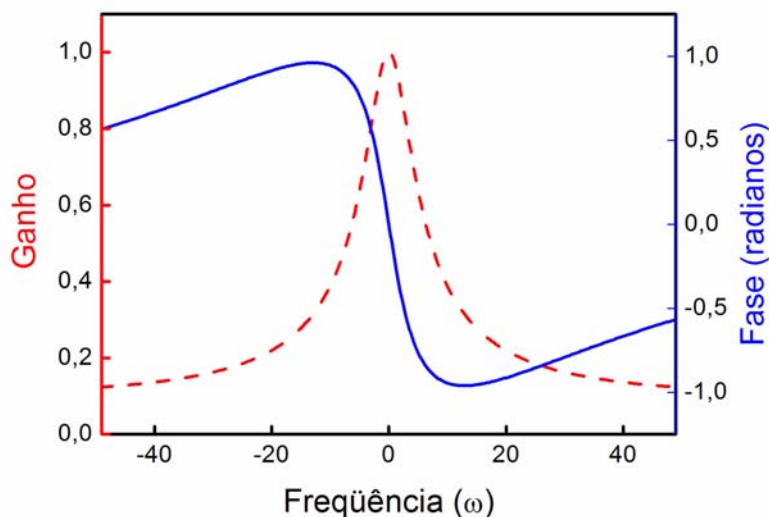


Figura 3.7: Ganho (curva tracejada vermelha) e fase (curva sólida azul) da função de transferência do filtro linear passivo.

Aqui podemos notar que a fase e o ganho da função de transferência do filtro linear passivo se comportam como as partes real e imaginária do índice de refração de um sistema atômico, tal como um gás diluído, modelado classicamente como um dielétrico de Lorentz e discutido na seção 1.4 do primeiro capítulo deste trabalho. Entretanto, da seção 2.6.2 do

capítulo anterior, sabemos que as "Regras de Ouro" exigem para a função de transferência total  $T(\omega)$  do circuito, a inversão da função de transferência de qualquer circuito linear passivo, assim

$$\frac{V_{sai}}{V_{ent}} = 1 + \frac{Z_2}{Z_1} \quad (3.14)$$

ou

$$T(\omega) = 1 + \frac{Z_2}{Z_1}. \quad (3.15)$$

Desta forma, substituindo (3.6) e (3.8) em (3.15), temos a função de transferência total

$$T(\omega) = 1 + \frac{i\omega R_2 C_1}{(1 + i\omega R_2 C_2)(1 + i\omega R_1 C_1)}. \quad (3.16)$$

A resposta em frequência, da amplitude e da fase da função de transferência total do circuito são mostrados na Figura 3.8, para componentes com os valores do filtro linear passivo citado acima.

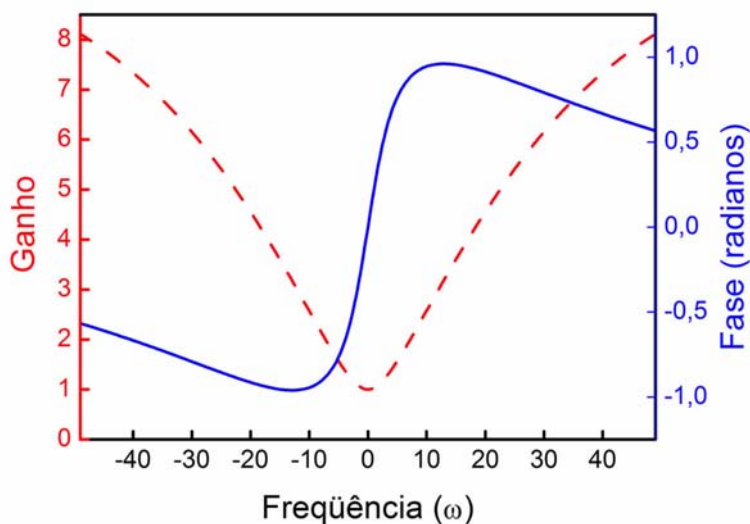


Figura 3.8: Ganho (curva tracejada vermelha) e fase (curva sólida azul) da função de transferência total  $T(\omega)$  do circuito de atraso de grupo negativo.

Na região de baixa frequência o ganho e a fase da função de transferência do circuito

é aproximada como

$$A(\omega) = 1 + O(\omega^2 (R_2 C_1)^2) \quad (3.17)$$

$$\phi(\omega) = \omega R_2 C_1 + O(\omega^3 (R_2 C_1)^3), \quad (3.18)$$

o que significa que a amplitude é praticamente constante e a fase aumenta linearmente com a frequência. Então o atraso de grupo torna-se

$$t_g = - \left. \frac{d\phi}{d\omega} \right|_{\omega=0} = -R_2 C_1 \quad (3.19)$$

$$t_g = -0,22 \text{ s} \quad (3.20)$$

em concordância com os resultados experimentais e teóricos discutidos nas próximas seções.

O atraso de grupo como uma função da frequência da portadora para este circuito, é demonstrado na Figura 3.9.

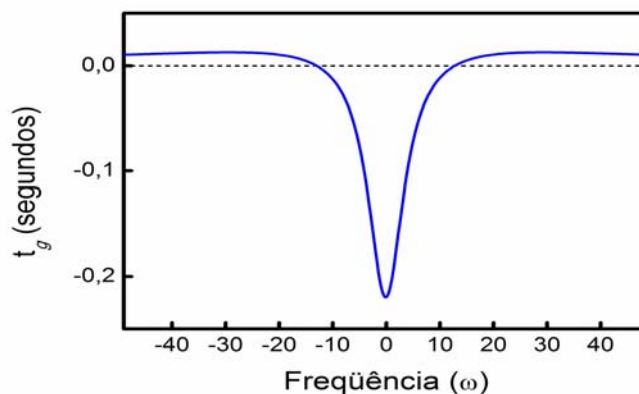


Figura 3.9: Atraso de grupo como uma função da frequência da portadora para o circuito de atraso negativo descrito neste capítulo.

É evidente a partir da figura que o atraso de grupo é negativo, ou seja, há um avanço do grupo, na região espectral em torno de  $\omega = 0$ . Nesta situação o pico da onda na porta de saída do circuito surge antes do pico da onda na porta de entrada chegar.

A origem deste efeito surpreendente é clara, se considerarmos o comportamento do circuito RC no circuito de realimentação. O divisor de tensão dependente da frequência é um filtro linear passivo que apresenta um atraso de grupo positivo, numa faixa estreita em torno de  $\omega = 0$ . Para manter as tensões iguais em suas entradas, o AmpOp deve compensar o atraso de grupo do filtro, fornecendo um avanço de grupo.

Como pode ser visto na Figura 3.8, a amplitude  $A(\omega)$  e a fase  $\phi(\omega)$  da função de transferência total não são lineares, exceto se  $\omega R_2 C_1 \ll 1$ , em razão dos termos de ordem superior nas equações (3.17) e (3.18). Estes termos induzem distorções no pulso de saída do circuito. Para manter a distorção tão pequena quanto possível, a parte significativa do espectro do pulso de entrada deve ser limitado ao interior da região de frequência

$$|\omega| \ll \frac{1}{R_2 C_1} \quad (3.21)$$

ou, para os valores dos componentes utilizados

$$|\omega| \ll 4,5 Hz. \quad (3.22)$$

### 3.5.2 Arranjo experimental

Para estudar as conseqüências e o comportamento surpreendente da propagação superluminal de pulsos Gaussianos e com *SCS* em circuitos eletrônicos, utilizamos o circuito de atraso negativo mostrado na Figura 3.3. Os parâmetros utilizados no circuito são  $R_1 = 10k\Omega$ ,  $C_1 = 0,22\mu F$ ,  $R_2 = 1M\Omega$  e  $C_2 = 22nF$  e o AmpOp *TL082*.

Como referência para as medidas do avanço de grupo provocado por este circuito, usamos um circuito de ganho unitário (ou buffer de tensão). A configuração buffer é uma variante da montagem não inversora que tem a saída ligada diretamente à entrada inversora, o que leva o ganho do amplificador à 1 (ganho unitário), por isso a tensão de saída é igual a da entrada não inversora, que aliás é única neste caso.

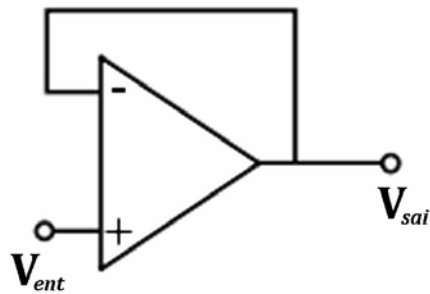


Figura 3.10: Esquema de montagem de um circuito de ganho unitário.

O atraso de grupo produzido por este tipo de circuito é nulo,  $t_g = 0$ , por isso, o mesmo é utilizado como referência para as nossas medidas do avanço de grupo provocado pelos circuitos de atraso negativo. Além disso, nas analogias aos estudos de superluminalidade em meios ópticos o mesmo pode ser considerado como um análogo de um caminho de vácuo usado como referência para as velocidades de grupo superluminais.

Os pulsos elétricos, Gaussianos e com *SCS*, utilizados em nossos estudos foram gerados, a partir do editor de equações do programa *AbrExpress 2.4*, em um gerador de funções arbitrárias Tektronix AFG3252 com resolução de 131.072 pontos no domínio do tempo e resolução de amplitude de 14 bits .

Os pulsos foram então aplicados às entradas dos circuitos e, tanto à saída do circuito de ganho unitário quanto à saída dos circuitos de atraso negativo foram registradas, simultaneamente, em tempo real com um osciloscópio digital NI USB-5133.

Para produzir avanços de grupo maiores, nós conectamos até quatro circuitos de atrasos negativos, idênticos, em série e observamos a propagação dos pulsos através desta cadeia. Cada amplificador na cadeia acrescenta ao avanço do grupo aproximadamente 0,22s, mas o ganho associado, conseqüentemente, aumenta a produção de ruído. Por esta razão, a adição de mais estágios de amplificação não foi possível. A configuração do nosso arranjo experimental é mostrada na Figura 3.11.

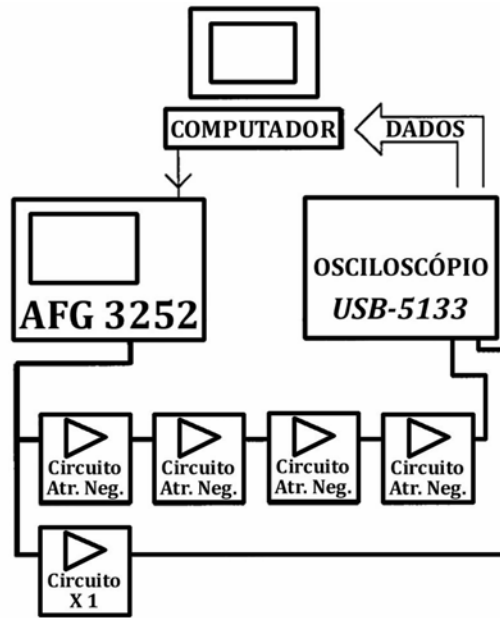


Figura 3.11: Configuração experimental. Um amplificador de ganho unitário foi incluído entre o AFG3252 e o osciloscópio como referência para o avanço de grupo provocado pela cadeia de circuitos de atraso negativo e para evitar realimentação.

O comportamento deste circuito foi simulado numericamente usando a função de transferência total e os valores dos componentes utilizados no circuito através do programa Matlab 7.6, e tanto os resultados experimentais quanto os teóricos podem se vistos nas seções seguintes.

## 3.6 Pulso Gaussiano

Antes de considerarmos o comportamento do pulso com *SCS* nestes circuitos eletrônicos com atrasos de grupo negativo, é instrutivo estudarmos a propagação de um pulso do tipo Gaussiano nestes meios. Para isto, tomaremos um pulso da seguinte forma,

$$V(t) = V_0 \exp\left(-\frac{(t-t_g)^2}{2\sigma^2}\right) \exp(-i\omega_c(t-t_g)). \quad (3.23)$$

Este pulso corresponde a um pulso Gaussiano de largura temporal  $\tau \approx 2,355\sigma$ , atraso de grupo igual a  $t_g$  e com frequência central  $\omega_c$ . Quando este tipo de pulso é propagado em

um circuito com atraso de grupo negativo, obtemos que sob certas condições, além de um discreto fator de amplificação, o pulso praticamente não sofre deformação, conforme pode ser visto na Figura 3.12.

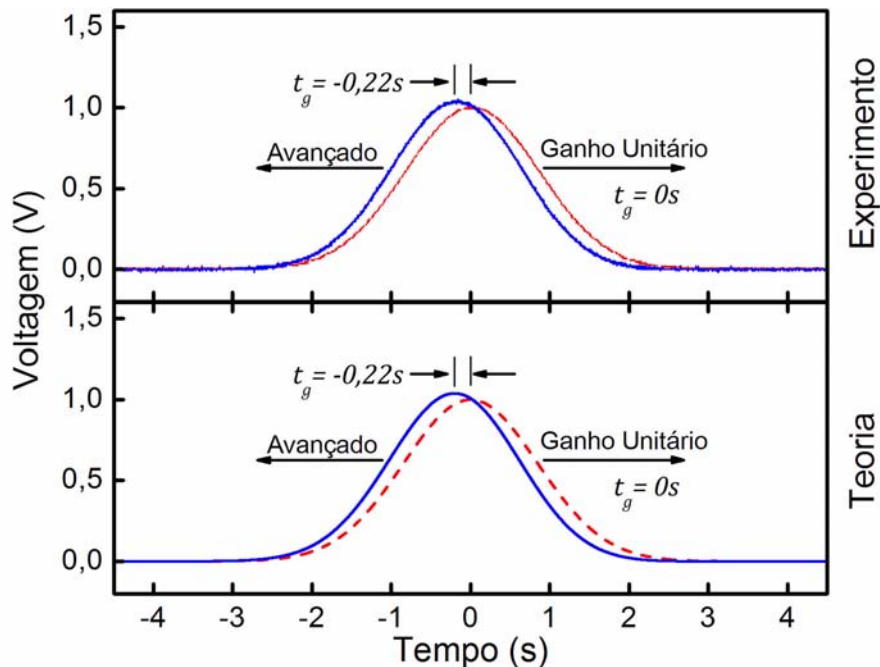


Figura 3.12: Resultado experimental e simulação numérica da propagação de um pulso Gaussiano através de um circuito de ganho unitário (curva tracejada vermelha) e um circuito de atraso negativo (curva sólida azul). Parâmetros:  $\tau = 2,0s$  e  $\omega_c = 0Hz$ .

De acordo com as discussões nos capítulos anteriores, vemos claramente na Figura 3.12 que o pulso Gaussiano está se propagando com uma velocidade de grupo superluminal, e sem deformação. Entretanto, isto não está em desacordo com a causalidade, pois, aqui não há nenhuma informação nova que possa ser atribuída ao pico do pulso Gaussiano que não estivesse presente numa pequena porção inicial da asa deste pulso. Isto decorre do fato do pulso Gaussiano possuir continuidade analítica, ou seja, as mudanças analíticas da forma de onda do pulso de entrada, tais como aquelas na parte inicial do pulso Gaussiano que usamos, o circuito tem a capacidade de extrapolar para o futuro, de tal forma a reproduzir a saída do pico do pulso Gaussiano antes que o pico do pulso de entrada tenha



chegado.

Propagamos o mesmo pulso Gaussiano de entrada que no caso anterior, em três circuitos de atraso de grupo negativo, idênticos, ligados em seqüência e ao observarmos a propagação do pulso através desta seqüência de circuitos, vemos que o avanço de grupo é aumentado proporcionalmente ao número de circuitos utilizados (ver figura 3.13).

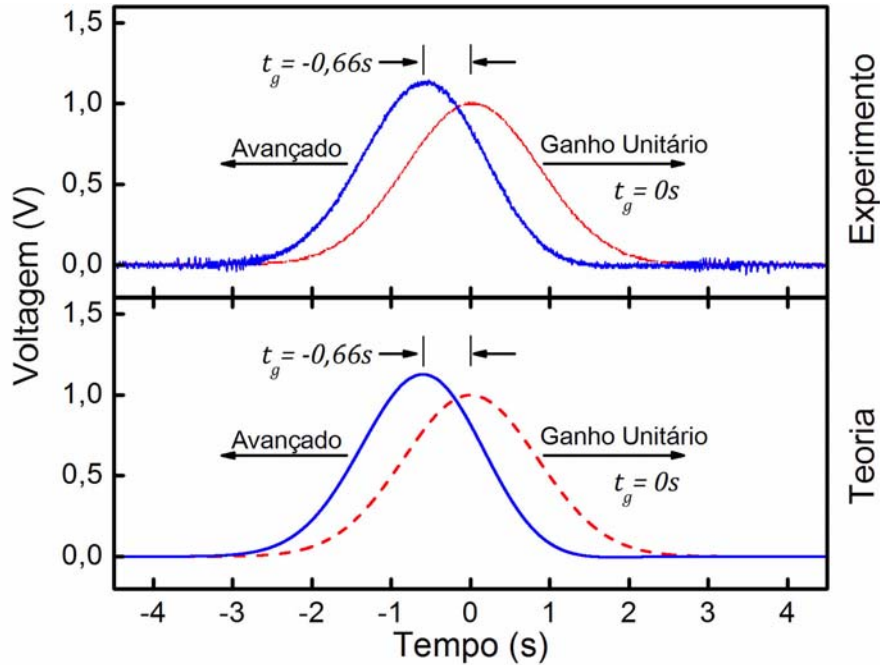


Figura 3.13: Resultado experimental e simulação numérica da propagação de um pulso Gaussiano através de um circuito de ganho unitário (curva tracejada vermelha) e três circuitos de atraso negativo (curva sólida azul). Parâmetros:  $\tau = 2,0s$  e  $\omega_c = 0Hz$ .

Aqui novamente, além de um discreto fator de amplificação, o pulso Gaussiano está se propagando com uma velocidade superluminal e sem deformação.

Para evitar distorções ou mantê-las as menores possíveis no pulso de saída do circuito, a parte significativa do espectro do pulso Gaussiano de entrada foi limitado ao interior da região de frequência  $|\omega| \ll 1/R_2C_1$ , onde a mudança de fase com a frequência é aproximadamente linear, como mostrado na Figura 3.14.

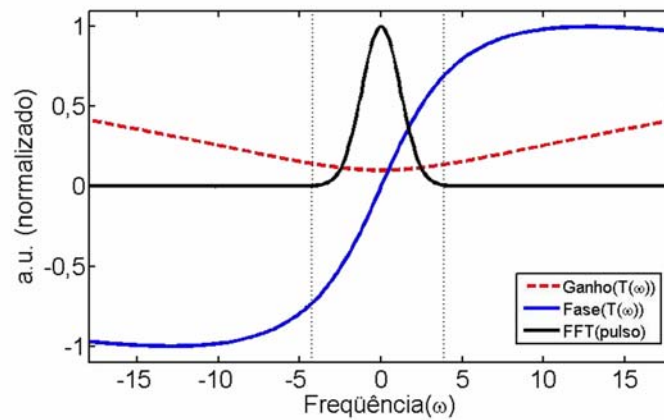


Figura 3.14: Espectro do pulso Gaussiano de entrada mostrado nas figuras 3.12 e 3.13 juntamente com a fase e o ganho da função de transferência total do circuito. Note que a parte significativa do espectro do pulso é limitado ao interior da região onde a mudança de fase em função da frequência é aproximadamente linear.

O resultado da propagação, nestes circuitos eletrônicos, de pulsos Gaussianos com a parte significativa do espectro não limitada a região de frequência citada pode ser visto na Figura 3.15,

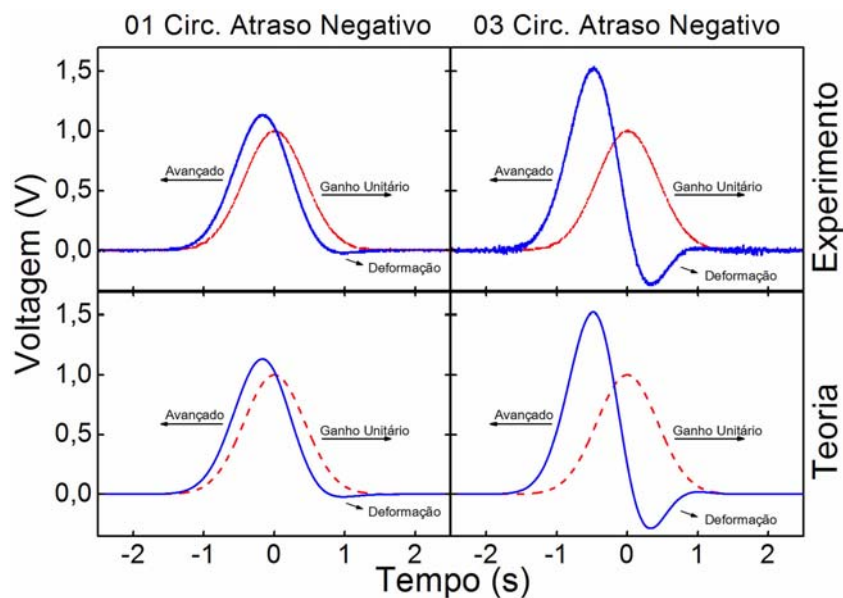


Figura 3.15: Resultado experimental e simulação numérica da propagação de um pulso Gaussiano através de um circuito de ganho unitário (curva tracejada vermelha) e através de um e de três circuitos de atraso negativo (curva sólida azul). Parâmetros:  $\tau = 1,0s$  e  $\omega_c = 0Hz$ .

bem como o seu espectro mostrado na Figura 3.16. Nesta situação os termos não lineares das equações (3.17) e (3.18) não podem ser desprezados e induzem distorções no pulso de saída.

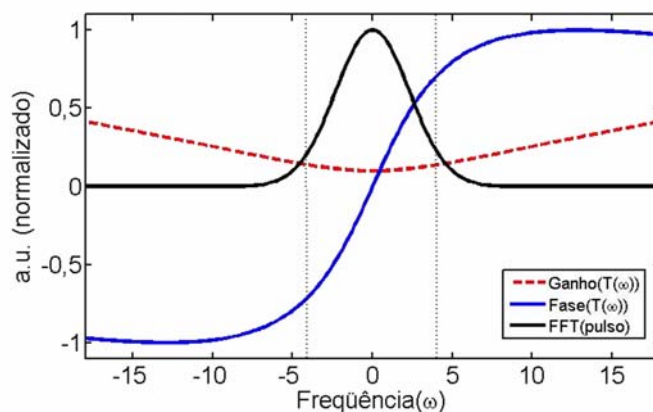


Figura 3.16: Espectro do pulso Gaussiano de entrada mostrado na figura 3.15 juntamente com a fase e o ganho da função de transferência total do circuito.. Note que a parte significativa do espectro do pulso não está limitada a região onde a mudança de fase em função da frequência é linear.

Nesta seção fizemos a propagação em circuitos eletrônicos com atrasos de grupo não-linear de um pulso Gaussiano que possui continuidade analítica, e vimos que o pulso Gaussiano se propaga com velocidade de grupo superluminal, sem violar a causalidade, uma vez que nenhuma nova informação não pode ser associada aos pontos analíticos deste pulso.

### 3.7 Pulso com SCS

Nesta seção estudaremos a propagação nestes circuitos eletrônicos, de um pulso com SCS que possui, pontos não analíticos bem comportados, aos quais associaremos a informação codificada nestes pulsos.

A função com SCS aqui investigada, apresenta a seguinte descrição matemática

$$f(t) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{A}{B-Ct^2}\right) \exp(-i\omega_c t), & \text{para } |t| < \sqrt{B/C} \\ 0, & \text{para } |t| \geq \sqrt{B/C} \end{cases}, \quad (3.24)$$

onde  $A$ ,  $B$  e  $C$  são constantes reais e  $\omega_c$  é a frequência da portadora do pulso.

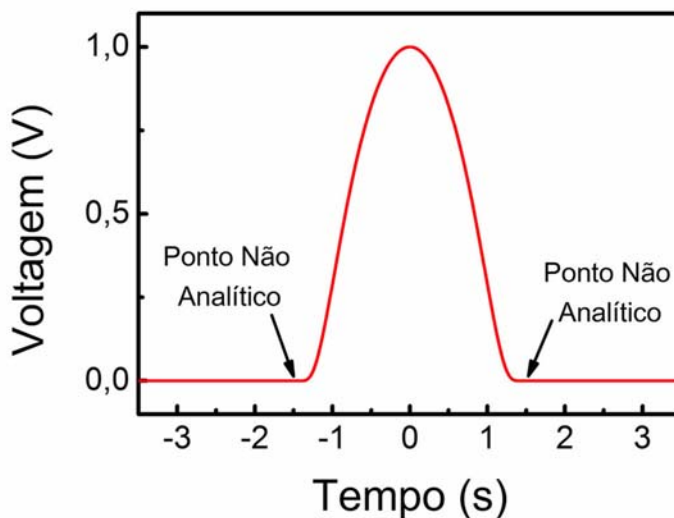


Figura 3.17: Modelo do pulso com SCS utilizado em nosso estudo. Os parâmetros deste pulso são:  $A = 350$ ,  $B = 225$ ,  $C = 100$  e  $\omega_c = 0$ . Assim os pontos não analíticos na forma de onda estão localizados em  $t = \sqrt{B/C} = \pm 1,5$  s.

Na Figura 3.17, temos uma representação da função com SCS gerada experimentalmente conforme descrito na seção 3.5.2. A parte central da função é suavemente emendada a uma função nula, de tal forma que a cauda da parte central desta função é cortada e emendada ao zero somente na região onde a amplitude do pulso é menor do que a resolução da tensão do AFG3252. Os parâmetros do pulso foram escolhidos de maneira que os pontos não analíticos em nossa função estejam localizados em  $\pm 1,5$  s.

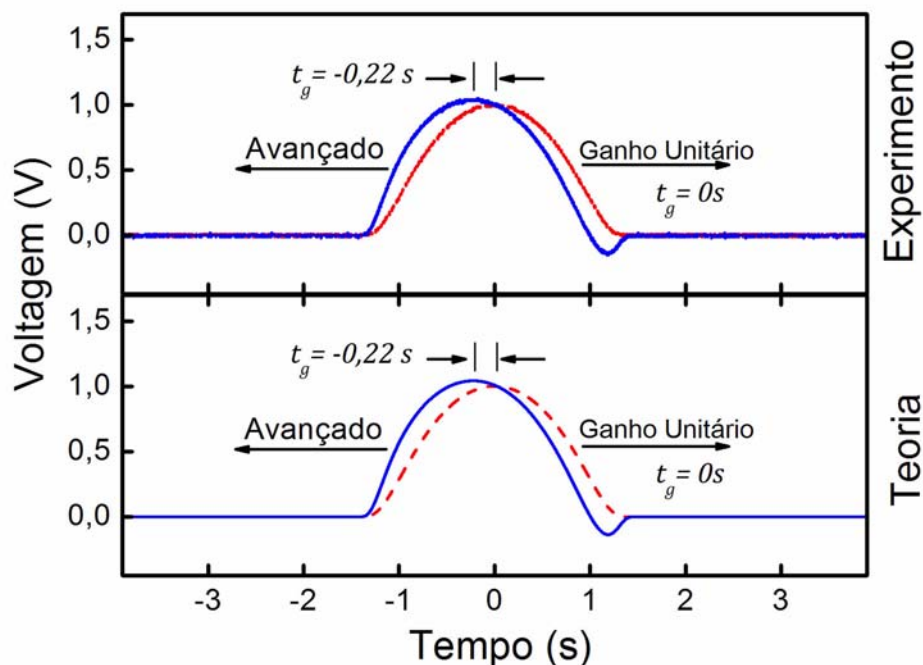


Figura 3.18: Resultado experimental e simulação numérica da propagação de um pulso com *SCS* através de um circuito de ganho unitário (curva tracejada vermelha) e a propagação superluminal da parte central deste pulso em um circuito de atraso de grupo negativo (curva sólida azul).

Na Figura 3.18 vemos que ao passar através do circuito de atraso negativo, a parte central do pulso com *SCS* se propaga com velocidade de grupo superluminal, sem violar a causalidade, uma vez que possui continuidade analítica. Entretanto, os pontos não analíticos presentes nas asas frontal e traseira deste pulso têm sua velocidade limitada a  $c$ .

A causalidade está limitando à  $c$  a propagação da informação, representada pelos pontos não analíticos. Podemos observar, também, na Figura 3.19 que ela não apenas limita a velocidade da informação associada à estes pontos, mas também provoca uma frente abrupta (*steepening*) no pulso ao passar através de dois circuitos de atraso negativo.

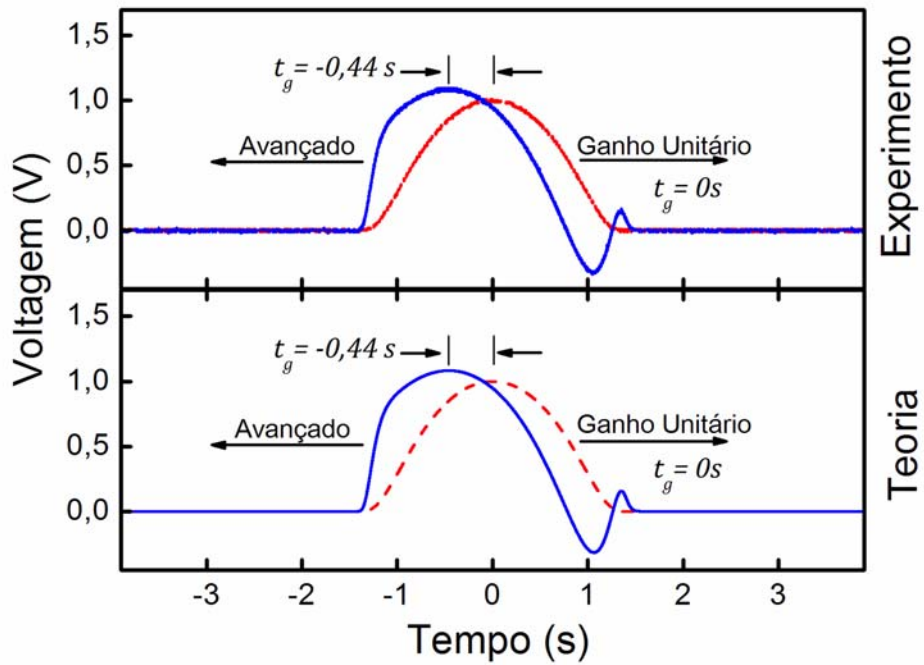


Figura 3.19: Resultado experimental e simulação numérica da propagação de um pulso com *SCS* através de um circuito de ganho unitário (curva tracejada vermelha) e uma frente abrupta devido a propagação através de dois circuitos de atraso negativo (curva sólida azul).

As distorções na asa traseira do pulso com *SCS* de saída do circuito são conseqüências das componentes de freqüência presentes no espectro do pulso de entrada, juntamente com o fato de uma parte significativa deste espectro estar numa região onde a mudança de fase deixa de ser linear com a freqüência, como pode ser visto na Figura 3.20.

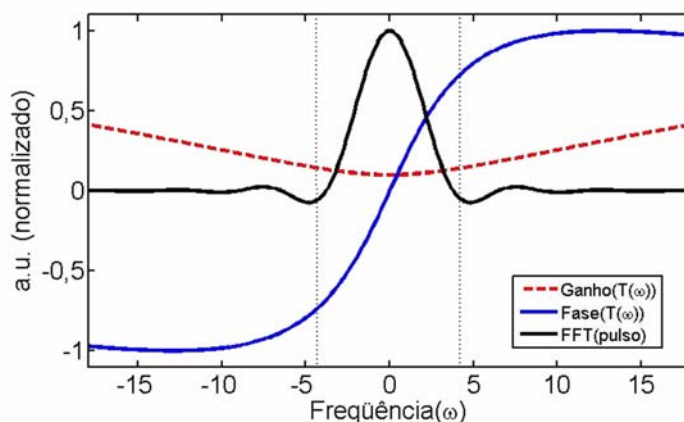


Figura 3.20: Espectro do pulso com *SCS* de entrada mostrado nas figuras 3.18 e 3.19 juntamente com a fase e o ganho da função de transferência total do circuito. Note que, além das componentes adicionais de frequências não presentes no espectro do pulso gaussiano, uma parte significativado do espectro deste pulso não está limitada a região onde a mudança de fase em função da frequência é linear.

Aqui vemos que o pulso com *SCS* possui uma parte significativa das componentes de frequência não limitada a região onde  $|\omega| \ll 4,5 Hz$ . Desta forma, os termos não lineares nas equações (3.17) e (3.18) induzem distorções no pulso com *SCS* de saída, semelhantes as observadas no caso do pulso Gaussiano, mostrado na Figura 3.15. Não sendo, estas distorções, conseqüências da causalidade ou da presença dos pontos não analíticos na forma de onda.

Quando aumentamos para quatro, o número de circuitos de atrasos negativos conectados em série, através do qual o pulso com *SCS* é propagado, o avanço de grupo da parte central deste pulso torna-se ainda maior, enquanto a informação associada aos pontos não analíticos continua limitada à  $c$ , de maneira que parte da energia do pulso tenta passar pelo ponto não analítico na asa frontal da forma de onda, provocando um choque de onda do pulso (ver figura 3.21).

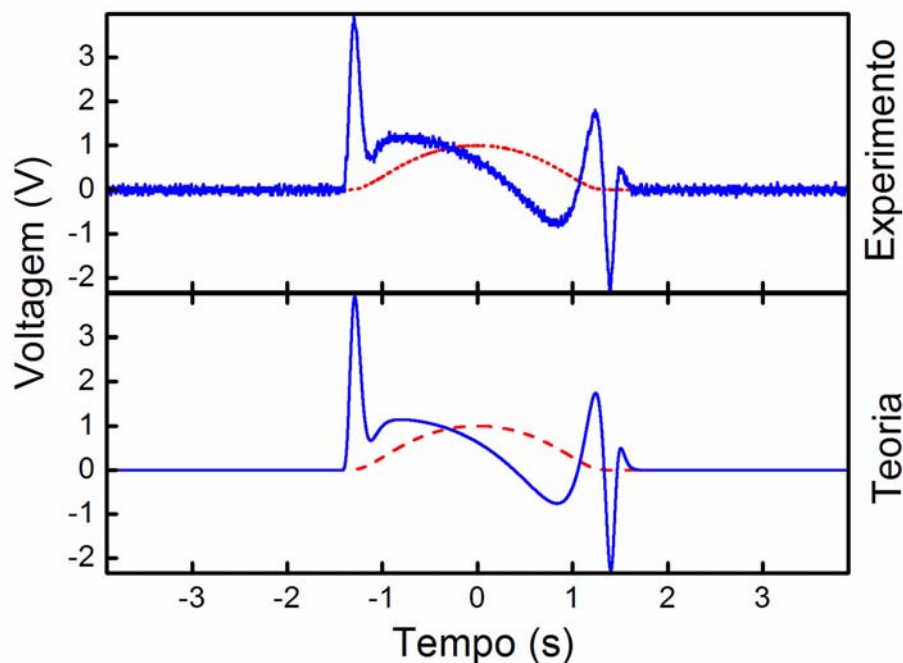


Figura 3.21: Resultado experimental e simulação numérica da propagação de um pulso com SCS através de um circuito de ganho unitário (curva tracejada vermelha) e o choque de onda do pulso ao se propagar através de quatro circuitos de atraso negativo (curva sólida azul).

Isto nos mostra que o princípio da causalidade não é violado. A análise a respeito da velocidade do ponto não analítico na asa traseira deste pulso torna-se bastante complicada devido as deformações resultantes dos termos não lineares nas equações (3.17) e (3.18). Neste caso a informação associada a este ponto perde o significado físico e não temos como determinar sua velocidade. Uma investigação adicional é necessária para compreender seu comportamento.

Deste modo, com base nestas observações, podemos notar que o ponto não analítico na asa frontal do pulso não se propaga com uma velocidade maior que a da luz no vácuo  $c$ . Portanto, ao associarmos a informação a este ponto não analítico notamos que ela não será transmitida a uma velocidade maior que  $c$ , conforme exige causalidade de Einstein.

Embora todo o nosso estudo tenha sido feito numérica e experimentalmente em cir-



cuitos eletrônicos, é possível construir experimentalmente pulsos ópticos com *SCS*. Isto pode ser feito em um meio superluminal óptico utilizando um formatador pulsos ópticos ("*pulse shaper*"), através da geração das frequências que correspondem a um pulso deste tipo.

Por fim, vale ressaltar a diferença entre nosso estudo com pulsos do tipo *SCS* e os trabalhos feitos, tanto por Sommerfeld e Brillouin [2] quanto os feitos por Stenner *et al* [7,8]. Nos trabalhos realizados pelos referidos autores, eles também usaram pontos não analíticos em pulsos, entretanto, estes pontos não analíticos foram representados como uma frente de onda descontínua. Contudo, sabemos que tais pulsos violam as condições de continuidade impostas pelas equações de Maxwell. Já em nosso estudo, o pulso é contínuo e infinitamente derivável, apresentando grandes vantagens, como discutido anteriormente.

# Capítulo 4

## Conclusão

Neste trabalho mostramos analogias entre circuitos eletrônicos com realimentação negativa e sistemas atômicos, modelados classicamente como um dielétrico de Lorentz bem como a relação entre os atrasos de grupo negativo, produzidos por estes circuitos, e o conceito de superluminalidade. Nosso objetivo era a utilização destes circuitos para o estudo experimental da propagação de pulsos elétricos, do tipo Gaussianos e com suporte compacto, com atrasos de grupo negativo. Os resultados experimentais deste estudo foram simulados numericamente com a ajuda do programa Matlab 7.6.

Através do experimento e das simulações numéricas, confirmamos que um pulso Gaussiano, neste meio, pode propagar-se com atraso de grupo negativo, ou seja, velocidade de grupo superluminal, reproduzindo os resultados experimentais existentes na literatura científica. Vimos que, sob certas condições, além de um discreto fator de amplificação o pulso propagado praticamente não sofre mudanças.

Quanto ao estudo da propagação de um pulso com *SCS* com pontos não analíticos bem comportados presentes em suas asas frontal e traseira, nossas simulações e experimentos provaram que podemos associar a informação ao ponto não analítico na asa frontal do pulso e que tais pontos nunca se propagam mais rápido do que a velocidade da luz no vácuo  $c$ . Deste modo, podemos dizer que uma vez que associarmos a informação a este ponto não analítico, mesmo que a velocidade de grupo seja superluminal, a informação

não poderá ser enviada a uma velocidade superior a da luz no vácuo. Assim, o princípio da causalidade não é violado.

Observamos também na propagação do pulso com *SCS* que, novos fenômenos como uma frente abrupta e o choque de onda do pulso foram induzidos pela limitação da velocidade, deste ponto não analítico, imposta pela causalidade. Assim, para sistemas superluminais como um circuito de atraso negativo, somos capazes de dizer exatamente onde está a informação em um pulso. Entretanto, observamos que, devido às deformações decorrentes da propagação do pulso com *SCS* neste meio superluminal, o ponto não analítico na parte traseira deste pulso não pôde ser associado à informação da mesma maneira que o ponto não analítico na parte dianteira e uma investigação adicional é necessária para compreender seu comportamento.

Uma perspectiva interessante para continuidade deste trabalho é aplicar as idéias aqui discutidas, em circuitos eletrônicos que apresentam propagação de pulsos com atraso de grupo positivo, ou seja, velocidade de grupo subluminal (luz lenta), onde permanece em aberto [8] a questão de qual seria a velocidade da informação para semelhantes sistemas.

# Bibliografia

- [1] R. W. Wood. *Phil. Mag.* **8**, 293 (1904).
- [2] L. Brillouin, *Wave Propagation and Group Velocity*. Academic Press, New York (1960).
- [3] C. G. B. Garret and D. E. McCumber. *Propagation of a gaussian light pulse through an anomalous dispersion medium*. PRA **1**, 305 (1970).
- [4] S. Chu and S. Wong. *Linear pulse propagation in an absorbing medium*. PRL **48**, 738 (1982).
- [5] R. Y. Chiao, et al. *Superluminality and amplifiers*. Prog. Crystal Growth Charact. **33**, 319 (1996).
- [6] M. W. Mitchell, R. Y. Chiao. *Negative group delay and "fronts" in a causal system: An experiment with very low frequency bandpass amplifiers*. Phys. Lett. A **230** (1997).
- [7] M. D. Stenner, D. J. Gauthier, and M. A. Neifeld. *The speed of information in a "fast-light" optical medium*. Nature **425**, 695 (2003).
- [8] M. D. Stenner, D. J. Gauthier, and M. A. Neifeld. *Fast Causal Information Transmission in a Medium With a Slow Group Velocity*. PRL **94**, 053902 (2005).
- [9] J. D. Jackson. *Classical Electrodynamics*. Third edition (1999).

- 
- [10] K. D. Machado. *Teoria do eletromagnetismo, Vol III*. pag. 281-418, UEPG, Ponta Grossa (2006).
- [11] P. W. Milonni. *Fast light, slow light and left-handed light*. Institute of Physics, Bristol, Philadelphia (2005).
- [12] L. V. Hau, et al. *Light speed reduction to 17 metres per second in an ultracold atomic gás*. Nature **397**, 594 (1999).
- [13] T. Nakanishi, K. Sugiyama and M. Kitano. *Demonstration of negative group delays in a simple electronic circuit*. Amer. J. Phys. **70**, 1117 (2002).
- [14] Lord Rayleigh. Nature (London) LX, **52** (1881).
- [15] R. W. Boyd and D. J. Gauthier. *Progress in Optics, Vol. 43*. pages 497-530 Elsevier, Amsterdam (2002).
- [16] R. Loudon. *The propagation of electromagnetic energy through an absorbing dielectric*. J. Phys. **A 3**, 233 (1970).
- [17] R. Y. Chiao and A. M. Steinberg. *Progress in Optics, Vol. 37*. pages 345-405, Elsevier, Amsterdam (1997).
- [18] J. C. Garrison, M. W. Mitchell, R. Y. Chiao, and E. L. Bolda. *Superluminal signals: causal loop paradoxes revisited*. Phys. Lett. A **245**, 19 (1998).
- [19] G. Diener. *Superluminal group velocities and information transfer*. Physics Letters A **223**, 327 (1996).
- [20] G. B. Arfken and H. J. Weber. *Mathematical Methods for Physicists*. Elsevier Academic Press, Sixth Edition (2005).

- 
- [21] W. F. da Silva. *Informação, velocidade da luz e pontos não analíticos*. UFAL, dissertação mestrado (2007).
- [22] R. S. Strichartz. *A guide to distribution theory and Fourier transforms*. CRC Press, Boca Raton (1994).
- [23] N. S. Bakhvalov, et al. *Russian Math. Surveys* **43**, 5 (1988).
- [24] I. Daubechies. *Orthonormal bases of compactly supported wavelets*. Commun. Pure Appl. Math. **41**, 909 (1988).
- [25] J. J. Brophy. *Basic electronics for scientists*. McGraw-Hill, New York (1977).
- [26] K. H. Kienitz. *Análise de circuitos*. Mamole, Barueri (2002).
- [27] P. Horowitz and W. Hill. *The art of electronics*. Cambridge University Press, Cambridge, Second edition (1989).
- [28] M. W. Mitchell, R. Y. Chiao. *Causality and negative group delays in a simple bandpass amplifier*. Amer. J. Phys. **66**, 14 (1998).
- [29] M. Kitano, T. Nakanishi and K. Sugiyama. *Negative group delay and superluminal propagation: An electronic circuit approach*. IEEE Journal of Selected Topic in Quantum Electronics **9**, 43 (2003).
- [30] D. Solli, R. Y. Chiao and J. M. Hickmann. *Superluminal effects and negative group delays in electronics and their applications*. PRE **66**, 056601 (2002).
- [31] K. E. Oughstun and S. Shen. *Velocity of energy transport for a time-harmonic field in a multiple-resonance Lorentz medium*. JOSA B **5**, 2395 (1988).
- [32] J. Peatross, S. A. Glasgow, and M. Ware. *Average Energy Flow of Optical Pulses in Dispersive Media*. PRL **84**, 2370 (2000).
-

- [33] H. W. Bode. *Network Analysis and Feedback Amplifier Design*. Van Nostrand, Princeton (1945).